

# Das Saureregenspiel

Pierre v. Mouche

Wageningen Universiteit und Universiteit Utrecht

pvmouche@gmx.net

Vortrag für das Doktorandenseminar in Heidelberg

5 Mai 2004

In Kooperation mit  
Michael Finus

# Zusammenfassung

Wir fassen alte und neue Resultate der nicht-kooperativen Analyse des

SAUREREGENSPIELS

zusammen und stellen weitere Forschungsprobleme vor.

## Webseite der Präsentation

- Gehen Sie nach [www.math.uu.nl/people/mouche](http://www.math.uu.nl/people/mouche).

## Webseite der Präsentation

- Gehen Sie nach [www.math.uu.nl/people/mouche](http://www.math.uu.nl/people/mouche).
- Wählen Sie die *Deutsche Flagge*.

## Webseite der Präsentation

- Gehen Sie nach [www.math.uu.nl/people/mouche](http://www.math.uu.nl/people/mouche).
- Wählen Sie die [Deutsche Flagge](#).
- Wählen Sie [Präsentationen](#).

## Webseite der Präsentation

- Gehen Sie nach [www.math.uu.nl/people/mouche](http://www.math.uu.nl/people/mouche).
- Wählen Sie die [Deutsche Flagge](#).
- Wählen Sie [Präsentationen](#).
- Wählen Sie die Präsentation [Das Saureregenspiel](#) (ab 7 Mai verfügbar).

# Präsentation

- Kein (kommerziell imperialistisches) Microsoft.

# Präsentation

- Kein (kommerziell imperialistisches) Microsoft.
- Es ist möglich um Ihre  $\text{\LaTeX}$  Dateien zu benutzen.



## Präsentation

- Kein (kommerziell imperialistisches) Microsoft.
- Es ist möglich um Ihre  $\LaTeX$  Dateien zu benutzen.
- Basiert auf Pdf $\LaTeX$ , Foiltex und Ppower4.

## Präsentation

- Kein (kommerziell imperialistisches) Microsoft.
- Es ist möglich um Ihre  $\text{\LaTeX}$  Dateien zu benutzen.
- Basiert auf Pdf $\text{\LaTeX}$ , Foiltex und Ppower4.
- Nur ein Programm wie der Acrobat Reader erforderlich.

## Präsentation (Fortsetzung)

Siehe

- die Webseite von Matt Welsh:  
[www.cs.berkeley.edu/~mdw/proj/texslides](http://www.cs.berkeley.edu/~mdw/proj/texslides);

## Präsentation (Fortsetzung)

Siehe

- die Webseite von Matt Welsh:  
`www.cs.berkeley.edu/~mdw/proj/texslides`;
- die Webseite von Jan Medlock:  
`www.amath.washington.edu/~medlock/presentation.html`;

## Präsentation (Fortsetzung)

Siehe

- die Webseite von Matt Welsh:  
`www.cs.berkeley.edu/~mdw/proj/texslides;`
- die Webseite von Jan Medlock:  
`www.amath.washington.edu/~medlock/presentation.html;`
- oder fragen Sie mich um Hilfe.

## Die Helden

- Karl-Göran Mäler.

## Die Helden

- Karl-Göran Mäler.

K. Mäler, The acid rain game. In: Valuation Methods and Policy Making in Environmental Economics, pages 231–252. Editors: H. Folmer and E. van Ierland. Elsevier, Amsterdam, 1989.

## Die Helden

- Karl-Göran Mäler.

K. Mäler, The acid rain game. In: Valuation Methods and Policy Making in Environmental Economics, pages 231–252. Editors: H. Folmer and E. van Ierland. Elsevier, Amsterdam, 1989.



- John Nash.



## Die Helden

- Karl-Göran Mäler.

K. Mäler, The acid rain game. In: Valuation Methods and Policy Making in Environmental Economics, pages 231–252. Editors: H. Folmer and E. van Ierland. Elsevier, Amsterdam, 1989.



- John Nash.

J. Nash, Equilibrium Points in  $N$ –Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci., 36, 48–49, 1950.

## Die Helden



- Henk Folmer.

## Modellbau

Das Saureregenspiel ist ein (einfaches) mathematisches Modell (ein Spiel) um Einsicht zu bekommen in die ökonomischen Aspekte des sauren Regens.

## Modellbau

Das Saureregenspiel ist ein (einfaches) mathematisches Modell (ein Spiel) um Einsicht zu bekommen in die ökonomischen Aspekte des sauren Regens.

Wenn man ein Modell hat mit einer Mathematischen und Reale-Welt-Struktur, dann ist es gut zu unterscheiden zwischen

- der Mathematischen Struktur,
- der Realen-Welt-Struktur

des Modells.

## Modellbau

Das Saureregenspiel ist ein (einfaches) mathematisches Modell (ein Spiel) um Einsicht zu bekommen in die ökonomischen Aspekte des sauren Regens.

Wenn man ein Modell hat mit einer Mathematischen und Reale-Welt-Struktur, dann ist es gut zu unterscheiden zwischen

- der Mathematischen Struktur,
- der Realen-Welt-Struktur

des Modells.

Für das Saurenregenspiels ist die Mathematische Struktur:

Spiel in strategischer Form.

## Modellbau (Fgv)

**Definition.** Ein formelles grenzüberschreitendes Verschmutzungsspiel, abgekürzt als FGV, ist gegeben durch ein Spiel in strategischer Form

$$(X^1, \dots, X^N; f^1, \dots, f^N)$$

## Modellbau (Fgv)

**Definition.** Ein formelles grenzüberschreitendes Verschmutzungsspiel, abgekürzt als FGV, ist gegeben durch ein Spiel in strategischer Form

$$(X^1, \dots, X^N; f^1, \dots, f^N)$$

wo für jeden Spieler  $j$ :

1. seine Strategiemenge ist  $X^j := [0, M^j]$  wo  $M^j > 0$ ;

## Modellbau (Fgv)

**Definition.** Ein formelles grenzüberschreitendes Verschmutzungsspiel, abgekürzt als FGV, ist gegeben durch ein Spiel in strategischer Form

$$(X^1, \dots, X^N; f^1, \dots, f^N)$$

wo für jeden Spieler  $j$ :

1. seine Strategiemenge ist  $X^j := [0, M^j]$  wo  $M^j > 0$ ;
2. seine Auszahlungsfunktion ist

$$f^j(x^1, \dots, x^N) := \mathcal{P}^j(x^j) - \mathcal{D}^j\left(\sum_{l=1}^N T_{jl}x^l\right)$$



## Modellbau (fgV, Fortsetzung)

mit allen

$$T_{jl} \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^j : [0, M^j] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}^j : [0, r^j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ wo } r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l;$$

## Modellbau (fgV, Fortsetzung)

mit allen

$$T_{jl} \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^j : [0, M^j] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}^j : [0, r^j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ wo } r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l;$$

3.  $T_{jj} > 0;$

## Modellbau (fgV, Fortsetzung)

*mit allen*

$$T_{jl} \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^j : [0, M^j] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}^j : [0, r^j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ wo } r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l;$$

3.  $T_{jj} > 0;$

4.  $\mathcal{D}^j$  and  $\mathcal{P}^j$  sind stetig;

## Modellbau (fgV, Fortsetzung)

*mit allen*

$$T_{jl} \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^j : [0, M^j] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}^j : [0, r^j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ wo } r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l;$$

3.  $T_{jj} > 0$ ;

4.  $\mathcal{D}^j$  and  $\mathcal{P}^j$  sind stetig;

5.  $\mathcal{D}^j$  ist strikt steigend und konvex;

## Modellbau (fgV, Fortsetzung)

*mit allen*

$$T_{jl} \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^j : [0, M^j] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}^j : [0, r^j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ wo } r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l;$$

3.  $T_{jj} > 0$ ;

4.  $\mathcal{D}^j$  and  $\mathcal{P}^j$  sind stetig;

5.  $\mathcal{D}^j$  ist strikt steigend und konvex;

6.  $\mathcal{P}^j$  ist strikt steigend und strikt konkav.

## Modellbau (Fgv, Fortsetzung)

Ausserdem:

7. die  $N \times N$ -Matrix  $T := (T_{kl})$  ist nicht diagonal.

## Modellbau (Fgv, Fortsetzung)

Ausserdem:

7. die  $N \times N$ -Matrix  $T := (T_{kl})$  ist nicht diagonal.

Bemerkung: diese Definition ist der von Welsch sehr ähnlich:

H. Welsch, An Equilibrium Framework for Global Pollution Problems, Journal of Environmental Economics and Management, 25, 1993, S64–S79

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV

- Die Spieler sind  $N$  LÄNDER.



## Reale-Welt-Struktur von einem fgV

- Die Spieler sind  $N$  LÄNDER.
- Die Strategiemenge  $X^j$  von Land  $j$  (mit Elementen  $x^j$ ) ist die Menge von möglichen EMISSIONSNIVEAUS von Land  $j$ .

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV

- Die Spieler sind  $N$  LÄNDER.
- Die Strategiemenge  $X^j$  von Land  $j$  (mit Elementen  $x^j$ ) ist die Menge von möglichen EMISSIONSNIVEAUS von Land  $j$ .
- Assoziiert mit der Emission  $x^j$  von jedem Land  $j$  ist eine Produktion  $\mathcal{P}^j(x^j)$ .  $\mathcal{P}^j$  nennt man die PRODUKTIONSFUNKTION von Land  $j$ ;

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV

- Die Spieler sind  $N$  LÄNDER.
- Die Strategiemenge  $X^j$  von Land  $j$  (mit Elementen  $x^j$ ) ist die Menge von möglichen EMISSIONSNIVEAUS von Land  $j$ .
- Assoziiert mit der Emission  $x^j$  von jedem Land  $j$  ist eine Produktion  $\mathcal{P}^j(x^j)$ .  $\mathcal{P}^j$  nennt man die PRODUKTIONSFUNKTION von Land  $j$ ;
- Wegen grenzüberschreitender Verschmutzung verursachen die Emissionen die ein gegebenes Land generiert einen Beitrag an der Deposition von jedem Land.  
Der grenzüberschreitende Verschmutzungsprozess wird repräsentiert mittels einer  $N \times N$  TRANSPORTMATRIX  $T$  mit elementen  $T_{ij}$ .

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV (Fortsetzung)

Die 'Portion'

$$T_{ij}x^j$$

von Land  $j$ 's Emissionsniveau  $x^j$  wird deponiert in Land  $i$ .

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV (Fortsetzung)

Die 'Portion'

$$T_{ij}x^j$$

von Land  $j$ 's Emissionsniveau  $x^j$  wird deponiert in Land  $i$ .

- Das impliziert, dass für einen EMISSIONSVECTOR  $(x^1, \dots, x^N)$  die DEPOSITION in Land  $j$  ist

$$Q^j = \sum_{l=1}^N T_{jl}x^l.$$

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV (Fortsetzung)

Die 'Portion'

$$T_{ij}x^j$$

von Land  $j$ 's Emissionsniveau  $x^j$  wird deponiert in Land  $i$ .

- Das impliziert, dass für einen EMISSIONSVECTOR  $(x^1, \dots, x^N)$  die DEPOSITION in Land  $j$  ist

$$Q^j = \sum_{l=1}^N T_{jl}x^l.$$

- Bemerkung: man spricht von GLOBALER GRENZÜBERSCHREITENDEN VERSCHMUTZUNG wenn jeder Transportmatrixkoeffizient 1 ist.

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV (Fortsetzung)

- Assoziiert mit der Deposition  $Q^j$  in Land  $j$  sind Schadekosten  $\mathcal{D}^j(Q^j)$ .  
 $\mathcal{D}^j$  nennt man die SCHADEKOSTENFUNKTION von Land  $j$ .

## Reale-Welt-Struktur von einem fgV (Fortsetzung)

- Assoziiert mit der Deposition  $Q^j$  in Land  $j$  sind Schadekosten  $\mathcal{D}^j(Q^j)$ .  $\mathcal{D}^j$  nennt man die SCHADEKOSTENFUNKTION von Land  $j$ .
- Produktion in einem Land führt zu Nutzen und Emissionen: kombinieren von Produktion und Schaden gibt die NETTO NUTZEN (FUNKTION)  $f^j$ .



## Reale-Welt-Struktur eines fvGs (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Das Setting weicht von dem von Mäler ab:

## Reale-Welt-Struktur eines fvGs (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Das Setting weicht von dem von Mäler ab:
  - ★ in der Weise dass seine Auszahlungsfunktionen die Summe von Schadekosten und Vermeidungskosten sind (die zu minimalisieren ist);
  - ★ in der Weise das seine Strategiemengen unbeschränkt sind (was unrealistischer ist).

## Reale-Welt-Struktur eines fvGs (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Das Setting weicht von dem von Mäler ab:
  - ★ in der Weise dass seine Auszahlungsfunktionen die Summe von Schadekosten und Vermeidungskosten sind (die zu minimalisieren ist);
  - ★ in der Weise das seine Strategiemengen unbeschränkt sind (was unrealistischer ist).
- Moderne Literatur beschäftigt sich mit viel komplexeren Settings:

## Reale-Welt-Struktur eines fvGs (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Das Setting weicht von dem von Mäler ab:
  - ★ in der Weise dass seine Auszahlungsfunktionen die Summe von Schadekosten und Vermeidungskosten sind (die zu minimalisieren ist);
  - ★ in der Weise dass seine Strategiemengen unbeschränkt sind (was unrealistischer ist).
- Moderne Literatur beschäftigt sich mit viel komplexeren Settings:
  - ★ Differentialspielen;
  - ★ assoziierte Kooperative Spielen;
  - ★ Unsicherheit wird berücksichtigt.

## Modellbau (Fortsetzung)

- Allgemeine Spieltheoretische Voraussetzungen:

## Modellbau (Fortsetzung)

- Allgemeine Spieltheoretische Voraussetzungen:
  - ★ Es gibt Regeln.
  - ★ Länder sind rational und intelligent (traditionelle Spieltheorie).

## Modellbau (Fortsetzung)

- Allgemeine Spieltheoretische Voraussetzungen:
  - ★ Es gibt Regeln.
  - ★ Länder sind rational und intelligent (traditionelle Spieltheorie).
- Implizite Voraussetzungen weil das Spiel ein Spiel in strategischer Form ist:

## Modellbau (Fortsetzung)

- Allgemeine Spieltheoretische Voraussetzungen:
  - ★ Es gibt Regeln.
  - ★ Länder sind rational und intelligent (traditionelle Spieltheorie).
- Implizite Voraussetzungen weil das Spiel ein Spiel in strategischer Form ist:
  - ★ Statisches Modell mit simultanen Strategien.
  - ★ Komplette Information.
  - ★ Isoliertes Modell.



## Modellbau (Fortsetzung)

- Allgemeine Spieltheoretische Voraussetzungen:
  - ★ Es gibt Regeln.
  - ★ Länder sind rational und intelligent (traditionelle Spieltheorie).
- Implizite Voraussetzungen weil das Spiel ein Spiel in strategischer Form ist:
  - ★ Statisches Modell mit simultanen Strategien.
  - ★ Komplette Information.
  - ★ Isoliertes Modell.
- Einige spezifische Voraussetzungen:
  - ★ Kosten-Nutzen Modell.
  - ★ Transport Prozess ist linear und es gibt nur eine Art von Molekülen.
  - ★ Ein Land berücksichtigt nur die eigenen Schaden.

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .
- Jedes fgV hat ein Nashgleichgewicht.

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .
- Jedes fgV hat ein Nashgleichgewicht.
- Jedes fgV hat ein eindeutiges soziales Optimum.

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .
- Jedes fgV hat ein Nashgleichgewicht.
- Jedes fgV hat ein eindeutiges soziales Optimum.
- Jede beste-Antwort-Korrespondenz ist singletonwertig, i.e. man hat sogar Reaktionsfunktionen (statt nur Korrespondenzen)

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .
- Jedes fgV hat ein Nashgleichgewicht.
- Jedes fgV hat ein eindeutiges soziales Optimum.
- Jede beste-Antwort-Korrespondenz ist singletonwertig, i.e. man hat sogar Reaktionsfunktionen (statt nur Korrespondenzen)
- Jede Reaktionsfunktion ist stetig und fallend.

## Sehr wichtige Tatsachen

- Die Auszahlungsfunktion von Land  $i$  ist strikt konkav in  $x^i$ .
- Jedes fgV hat ein Nashgleichgewicht.
- Jedes fgV hat ein eindeutiges soziales Optimum.
- Jede beste-Antwort-Korrespondenz ist singletonwertig, i.e. man hat sogar Reaktionsfunktionen (statt nur Korrespondenzen)
- Jede Reaktionsfunktion ist stetig und fallend.
- Wenn  $N \geq 3$ , dann ist keine Auszahlungsfunktion strikt konkav.

# Mathematische Bequemheit

Voraussetzungen die man meistens macht wegen der 'mathematischen Bequemheit':



## Mathematische Bequemheit

Voraussetzungen die man meistens macht wegen der ‘mathematischen Bequemheit’:

- Regularitätsvoraussetzungen (REGULARES fgV) die garantieren dass das soziale Optimum und jedes Nashgleichgewicht ein inneres ist.

## Mathematische Bequemheit

Voraussetzungen die man meistens macht wegen der ‘mathematischen Bequemheit’:

- Regularitätsvoraussetzungen (REGULARES fgV) die garantieren dass das soziale Optimum und jedes Nashgleichgewicht ein inneres ist.
- Glattheitsvoraussetzungen (SUPER-GLATTES fgV) die garantieren das man Methoden der Differentialrechnung benutzen kann.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon Umweltökonomien (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon UmweltökonomInnen (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

- I. Es gibt ein eindeutiges Nashgleichgewicht.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon UmweltökonomInnen (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

- I. Es gibt ein eindeutiges Nashgleichgewicht.
- II. Jedes Nashgleichgewicht hat einen positiven Verlust von sozialer Wohlfahrt.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon Umweltökonomien (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

- I. Es gibt ein eindeutiges Nashgleichgewicht.
- II. Jedes Nashgleichgewicht hat einen positiven Verlust von sozialer Wohlfahrt.
- III. Ein Nashgleichgewicht ist stark Pareto-ineffizient wenn kein Transportmatrixkoeffizient Null ist.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon UmweltökonomInnen (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

- I. Es gibt ein eindeutiges Nashgleichgewicht.
- II. Jedes Nashgleichgewicht hat einen positiven Verlust von sozialer Wohlfahrt.
- III. Ein Nashgleichgewicht ist stark Pareto-ineffizient wenn kein Transportmatrixkoeffizient Null ist.
- IV. Das totale Emissionsniveau in dem sozialen Optimum ist kleiner als das totale Emissionsniveau in einem gegebenen Nashgleichgewicht.

## Charakteristiken

Hier ist eine Liste von Charakteristiken für fgV's wovon UmweltökonomInnen (natürlich nicht alle!) denken dass diese gültig sind.

- I. Es gibt ein eindeutiges Nashgleichgewicht.
- II. Jedes Nashgleichgewicht hat einen positiven Verlust von sozialer Wohlfahrt.
- III. Ein Nashgleichgewicht ist stark Pareto-ineffizient wenn kein Transportmatrixkoeffizient Null ist.
- IV. Das totale Emissionsniveau in dem sozialen Optimum ist kleiner als das totale Emissionsniveau in einem gegebenen Nashgleichgewicht.
- V. Für jedes Land ist das Depositionsniveau in dem sozialen Optimum



kleiner als das Depositionsniveau in einem gegebenen Nashgleichgewicht.

## Gefangenendilemmaspiel

Bemerkung:

Ein fgV ist ein Gefangenendilemmaspiel

ist eine schlechte Charakteristik, weil

## Gefangenendilemmaspiel

Bemerkung:

Ein fgV ist ein Gefangenendilemmaspiel

ist eine schlechte Charakteristik, weil

- eine notwendige Bedingung für ein fgV um ein Gefangenendilemma zu sein ist dass jedes land eine affine Schadekostenfunktion hat.

## Gefangenendilemmaspiel (Fortsetzung)

Und hinreichend für ein fgV um ein Gefangenendilemma zu sein, sind die drei folgende Bedingungen:

## Gefangenendilemmaspiel (Fortsetzung)

Und hinreichend für ein fgV um ein Gefangenendilemma zu sein, sind die drei folgende Bedingungen:

- jedes Land hat eine affine Schadekostenfunktion;

## Gefangenendilemmaspiel (Fortsetzung)

Und hinreichend für ein fgV um ein Gefangenendilemma zu sein, sind die drei folgende Bedingungen:

- jedes Land hat eine affine Schadekostenfunktion;
- das strikt dominante Nashgleichgewicht ist ein inneres;

## Gefangenendilemmaspiel (Fortsetzung)

Und hinreichend für ein fgV um ein Gefangenendilemma zu sein, sind die drei folgende Bedingungen:

- jedes Land hat eine affine Schadekostenfunktion;
- das strikt dominante Nashgleichgewicht ist ein inneres;
- jedes Land ist empfindlich für Emissionen von zumindestens einem anderen Land.

## Wahrheitstabelle

Klasse / Charakteristik	I	II	III	IV	V
1. Super-glattes, reguläres und globales fgV	+	+	+	+	+
2. Super-glattes und reguläres fgV	-	+	+	-	-
3. Globales und reguläres fgV	?	+	+	?	?
4. Super-glattes fgV	-	-	-	-	-
5. Reguläres fgV	-	?	+	-	-
6. Globales fgV	-	-	-	-	-
7. FgV	-	-	-	-	-

Aide-mémoire:

I: eindeutiges Nashgleichgewicht. II: positiver sozialer Wohlfahrtsverlust ...

III: starke Paretoineffizienz ... IV: totales Emissionsniveau ...

V: Depositionsniveau ...



## Wahrkeitstabelle (Fortsetzung)

Siehe (auch für weitere referenzen):

- Folmer, H. en P. v. Mouche (2002), The acid rain game: a formal and mathematically rigorous analysis. In Festschrift for K. Mäler, blz. 138-161. Editors: P. Dasgupta, B. Kriström en K. Löffgren. Edward Elgar, Cheltenham.
- Finus, v. Mouche. (Arbeit in Entwicklung.)

## Rückschlüsse

Bemerkungen:

- Alle Charakteristiken sind gültig für super-glatte regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.

## Rückschlüsse

Bemerkungen:

- Alle Charakteristiken sind gültig für super-glatte regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Hoffentlich sind auch alle Charakteristiken gültig für regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.

## Rückschlüsse

Bemerkungen:

- Alle Charakteristiken sind gültig für super-glatte regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Hoffentlich sind auch alle Charakteristiken gültig für regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Alle Charakteristiken sind ungültig für die Klasse der fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.

## Rückschlüsse

Bemerkungen:

- Alle Charakteristiken sind gültig für super-glatte regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Hoffentlich sind auch alle Charakteristiken gültig für regulare fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Alle Charakteristiken sind ungültig für die Klasse der fgV's mit globaler grenzüberschreitender Verschmutzung.
- Also wir haben ein "alles ist möglich Satz" in dem Stil von Sonnenschein-Mantel-Debreu für die Klasse der Fgv's.

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.
3. Mathematische theorie für die Gleichungen von Navier-Stokes.



## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.
3. Mathematische theorie für die Gleichungen von Navier-Stokes.
4. Das P- versus NP-Problem.

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.
3. Mathematische theorie für die Gleichungen von Navier-Stokes.
4. Das P- versus NP-Problem.
5. Die Vermutung von Poincaré. (Gelöst durch Grigori Perelman?)

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.
3. Mathematische theorie für die Gleichungen von Navier-Stokes.
4. Das P- versus NP-Problem.
5. Die Vermutung von Poincaré. (Gelöst durch Grigori Perelman?)
6. Die Riemannhypothese.

## 1000.000 Dollar Probleme

Eine Million Dollar Probleme (siehe [www.claymath.org](http://www.claymath.org) für präzise Formulierungen und für die Regel).

1. Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.
2. Vermutung von Hodge.
3. Mathematische theorie für die Gleichungen von Navier-Stokes.
4. Das P- versus NP-Problem.
5. Die Vermutung von Poincaré. (Gelöst durch Grigori Perelman?)
6. Die Riemannhypothese.
7. Weitere Entwicklung der Yang-Mills Theorie.

# 25 Euro Probleme

## 25 Euro Probleme

1. Gegeben eine stetige fallende Funktion  $V^j : \mathbf{X}^j \rightarrow X^j$ , gibt es ein fgV mit Emissionsmengen  $X^1, \dots, X^N$  so dass  $V^j$  die Reaktionsfunktion von Land  $j$  ist?

## 25 Euro Probleme

1. Gegeben eine stetige fallende Funktion  $V^j : \mathbf{X}^j \rightarrow X^j$ , gibt es ein fgV mit Emissionsmengen  $X^1, \dots, X^N$  so dass  $V^j$  die Reaktionsfunktion von Land  $j$  ist?
2. Hat jedes globales regulares fgV ein eindeutiges Nashgleichgewicht?

## 25 Euro Probleme

1. Gegeben eine stetige fallende Funktion  $V^j : \mathbf{X}^j \rightarrow X^j$ , gibt es ein fgV mit Emissionsmengen  $X^1, \dots, X^N$  so dass  $V^j$  die Reaktionsfunktion von Land  $j$  ist?
2. Hat jedes globales regulares fgV ein eindeutiges Nashgleichgewicht?
3. Beweise oder widerlege für ein globales reguläres fgv eigenschaften IV (und V).



## 25 Euro Probleme

1. Gegeben eine stetige fallende Funktion  $V^j : \mathbf{X}^j \rightarrow X^j$ , gibt es ein fgV mit Emissionsmengen  $X^1, \dots, X^N$  so dass  $V^j$  die Reaktionsfunktion von Land  $j$  ist?
2. Hat jedes globales regulares fgV ein eindeutiges Nashgleichgewicht?
3. Beweise oder widerlege für ein globales reguläres fgv eigenschaften IV (und V).
4. Ist für jedes Land das totale Depositionsniveau in dem Sozialen Optimum kleiner oder gleich als das totale Depositionsniveau in einem gegebenen Nashgleichgewicht?

## 25 Euro Probleme (Fortsetzung)

5. Identifiziere fgV's (ohne Symmetrie-eigenschaften) wo das soziale Optimum eine (unanime) Paretoverbesserung von einem Nashgleichgewicht ist.

## 25 Euro Probleme (Fortsetzung)

5. Identifiziere fgV's (ohne Symmetrie-eigenschaften) wo das soziale Optimum eine (unanime) Paretoverbesserung von einem Nashgleichgewicht ist.
6. Gibt es ein fgV mit einem Nashgleichgewicht das stark Pareto-ineffizient aber nicht schwach Pareto-ineffizient ist?

## Zum Schluss

Das Saureregenspiel ist sehr geeignet für einen Kurs (für Studenten die Umweltökonomie studieren) wo es ein Ziel ist etwas Spieltheorie beizubringen.

## **Spielgarten von Spielen in strategischer Form**

- Spieler: jemand oder etwas das Entscheidungen trifft.

## **Spielgarten von Spielen in strategischer Form**

- Spieler: jemand oder etwas das Entscheidungen trifft.
- Strategie (von einem Spieler): ein komplet ausgearbeiteter Spielplan.

## **Spielgarten von Spielen in strategischer Form**

- Spieler: jemand oder etwas das Entscheidungen trifft.
- Strategie (von einem Spieler): ein komplet ausgearbeiteter Spielplan.
- Multistrategie ('strategy profile'): eine Strategie für jeden Spieler.

## Spielgarten von Spielen in strategischer Form

- Spieler: jemand oder etwas das Entscheidungen trifft.
- Strategie (von einem Spieler): ein komplet ausgearbeiteter Spielplan.
- Multistrategie ('strategy profile'): eine Strategie für jeden Spieler.
- Beste Antwort (von einem Spieler): eine beste Strategie die ein Spieler spielen kann, gegeben die Strategien der anderen Spieler.



## Spielarten von Spielen in strategischer Form

- Spieler: jemand oder etwas das Entscheidungen trifft.
- Strategie (von einem Spieler): ein komplet ausgearbeiteter Spielplan.
- Multistrategie ('strategy profile'): eine Strategie für jeden Spieler.
- Beste Antwort (von einem Spieler): eine beste Strategie die ein Spieler spielen kann, gegeben die Strategien der anderen Spieler.
- Beste-Antwort-Korrespondenz für Spieler  $i$ : eine Abbildung  $R^i$  die an jeder Kombination von Strategien der anderen Spielern die Menge der beste Antworten von Spieler  $i$  zufügt.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form

- Nashgleichgewicht: eine Multistrategie so dass kein Spieler seine Auszahlung vergrössern kann durch als einziger eine andere Strategie zu wählen. (Andere Formulierung: ein Fixpunkt der Beste Antwort-Korrespondenz  $R$ .)

## Spielgarten von Spielen in strategischer Form

- Nashgleichgewicht: eine Multistrategie so dass kein Spieler seine Auszahlung vergrössern kann durch als einziger eine andere Strategie zu wählen. (Andere Formulierung: ein Fixpunkt der Beste Antwort-Korrespondenz  $R$ .)
- Strikt dominante Strategie (von einem Spieler): eine Strategie von einem Spieler die die beste für ihn ist (unabhängig von der Wahl der Strategien der anderen Spielern).

## Spielarten von Spielen in strategischer Form

- Nashgleichgewicht: eine Multistrategie so dass kein Spieler seine Auszahlung vergrössern kann durch als einziger eine andere Strategie zu wählen. (Andere Formulierung: ein Fixpunkt der Beste Antwort-Korrespondenz  $R$ .)
- Strikt dominante Strategie (von einem Spieler): eine Strategie von einem Spieler die die beste für ihn ist (unabhängig von der Wahl der Strategien der anderen Spielern).
- Strikt dominantes (Nash-)gleichgewicht: eine Multistrategie wo jeder Spieler eine strikt dominante Strategie hat.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form

- Nashgleichgewicht: eine Multistrategie so dass kein Spieler seine Auszahlung vergrössern kann durch als einziger eine andere Strategie zu wählen. (Andere Formulierung: ein Fixpunkt der Beste Antwort-Korrespondenz  $R$ .)
- Strikt dominante Strategie (von einem Spieler): eine Strategie von einem Spieler die die beste für ihn ist (unabhängig von der Wahl der Strategien der anderen Spielern).
- Strikt dominantes (Nash-)gleichgewicht: eine Multistrategie wo jeder Spieler eine strikt dominante Strategie hat.
- Soziales Optimum: eine Multistrategie wo die Summe der Auszahlungsfunktionen maximal ist.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

- Wenn es ein soziales Optimum gibt, dann ist der Verlust von sozialer Wohlfahrt eines Nashgleichgewichtes definiert als die totale Auszahlung in einem sozialen Optimum minus die totale Auszahlung in dem Nashgleichgewicht.

## Spielgarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

- Wenn es ein soziales Optimum gibt, dann ist der Verlust von sozialer Wohlfahrt eines Nashgleichgewichtes definiert als die totale Auszahlung in einem sozialen Optimum minus die totale Auszahlung in dem Nashgleichgewicht.
- Starke Pareto-effiziente Multistrategie: jeder Vorschlag für eine andere Multi-strategie (mit einem anderen Auszahlungsvektor) empfangt ein Veto von mindestens ein Spieler.

## Spielgarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

- Wenn es ein soziales Optimum gibt, dann ist der Verlust von sozialer Wohlfahrt eines Nashgleichgewichtes definiert als die totale Auszahlung in einem sozialen Optimum minus die totale Auszahlung in dem Nashgleichgewicht.
- Starke Pareto-effiziente Multistrategie: jeder Vorschlag für eine andere Multi-strategie (mit einem anderen Auszahlungsvektor) empfangt ein Veto von mindestens ein Spieler.
- Schwache Pareto-ineffiziente Multistrategie: es gibt ein Vorschlag für eine andere Multi-strategie die für jeden Spieler besser ist.



## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Beispiel: in dem Bimatrixspiel

$$\left( \begin{array}{cc} \underline{1;2} & 2;1 \\ \star\underline{1;3} & \star\underline{3,2} \end{array} \right)$$

sind die unterstrichene Multistrategien schwach Pareto-effizient und die gesternnte stark Pareto-effizient.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Beispiel: in dem Bimatrixspiel

$$\left( \begin{array}{cc} \underline{1; 2} & 2; 1 \\ \star \underline{1; 3} & \star \underline{3, 2} \end{array} \right)$$

sind die unterstrichene Multistrategien schwach Pareto-effizient und die gesternnte stark Pareto-effizient.

- Gefangenendilemma: ein Spiel in strategischer Form wo jeder Spieler eine strikt dominante Strategie hat so dass das strikt dominante Gleichgewicht schwach Pareto-ineffizient ist.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Ein soziales Optimum ist stark Pareto-effizient.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Ein soziales Optimum ist stark Pareto-effizient.
- Im allgemeinen gibt es keine Beziehungen zwischen Nashgleichgewichte und soziale Optima.

## Spielarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Ein soziales Optimum ist stark Pareto-effizient.
- Im allgemeinen gibt es keine Beziehungen zwischen Nashgleichgewichte und soziale Optima.
- Das strikt dominante Gleichgewicht von einem Gefangenendilemmaspiels hat einen positiven sozialen Wohlfahrtsverlust,

## Spielgarten von Spielen in strategischer Form (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- Ein soziales Optimum ist stark Pareto-effizient.
- Im allgemeinen gibt es keine Beziehungen zwischen Nashgleichgewichte und soziale Optima.
- Das strikt dominante Gleichgewicht von einem Gefangenendilemmaspiels hat einen positiven sozialen Wohlfahrtsverlust,  
aber ein Spiel in strategischer Form mit einem strikt dominanten Nashgleichgewicht das ein positiver sozialer Wohlfahrtsverlust hat ist nicht notwendigerweise ein Gefangenendilemma.

## Pareto und Nash meistern

Helfen Sie mir bitte Pareto und Nash zu meistern:

## Pareto und Nash meistern

Helfen Sie mir bitte Pareto und Nash zu meistern:

Bitte schön:

- Gehe zu [www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html](http://www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html).



## Pareto und Nash meistern

Helfen Sie mir bitte Pareto und Nash zu meistern:

Bitte schön:

- Gehe zu [www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html](http://www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html).
- Geben Sie "opendeur" als Kennwort.

## Pareto und Nash meistern

Helfen Sie mir bitte Pareto und Nash zu meistern:

Bitte schön:

- Gehe zu [www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html](http://www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html).
- Geben Sie "opendeur" als Kennwort.
- Wählen Sie "Pareto-effizienz (stark oder schwach)" oder "Nashgleichgewichte".

## Pareto und Nash meistern

Helfen Sie mir bitte Pareto und Nash zu meistern:

Bitte schön:

- Gehe zu [www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html](http://www.math.uu.nl/people/mouche/ict.html).
- Geben Sie "opendeur" als Kennwort.
- Wählen Sie "Pareto-effizienz (stark oder schwach)" oder "Nashgleichgewichte".
- Üben Sie so lange sie brauchen.