MICRO-ECONOMIE

voor bèta's

Deel IV

Zuivere ruileconomieën

2008

Verbeterde versie 0.9967 (oktober 2016)

On vous a sans doute souvent demandé à quoi servent les mathématiques et si ces délicates constructions que nous tirons tout entières de notre esprit ne sont pas artificielles et enfantées par notre caprice. Parmi les personnes qui font cette question, je dois faire une distinction: les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde.

Henri Poincaré.

WOORD VOORAF

Dit typoscript met titel "Zuivere ruileconomieën" is het vierde in een reeks. Het eerste heeft als titel "De neoklassieke micro-wereld", het tweede "Consumententheorie" en het derde "Producententheorie". Uitgaande van enige bedrevenheid met nutsmaximalisatie is dit vierde typoscript vrij *selfcontained* wat de formele structuur aangaat; tezamen met het tweede is het helemaal *selfcontained*. Tezamen met het eerste is het dat ook *selfcontained* wat de reële-wereld-structuur aangaat.

Wageningen, oktober 2016, Pierre v. Mouche

`pvmouche@deds.nl`
`http://home.deds.nl/~pvmouche`

Inhoudsopgave

1 Zuivere ruileconomieën

1.1 *Setting*

Fixeer twee positieve gehele getallen N en n. Afhankelijk van hun context heten de elementen van $\{1, \ldots, N\}$ consumenten en die van $\{1, \ldots, n\}$ goedtypen. Onder een goederenbundel verstaat men een element van $\mathbb{R}^n_+$. Een goederenbundel $(x_1, \ldots, x_n)$ noteren we ook wel met de vectornotatie $\mathbf{x}$.

In deze paragraaf zijn er twee hoofdobjecten:[1]

❶ voor elke consument h een goederenbundel $\boldsymbol{\omega}^h > \mathbf{0}$, verder initiële goederenbundel te noemen, zodanig dat voor elk goed k het getal $O_k := \sum_{h=1}^{N} \omega_k^h$ positief is;

❷ voor elke consument h een functie, $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, verder nutsfunctie te noemen.

Het $2N-$tupel[2] $(u^1, \ldots, u^N; \boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^N)$ noemt men een zuivere ruileconomie tussen N consumenten met n goederen.

[1] Met subschriften zullen we doorgaans naar goedtypen en met superschriften naar consumenten verwijzen.

[2] Ter herinnering: een tupel is een geordende samenstelling van objecten. Als er m objecten zijn, spreekt men ook wel van m-tupel.

Gegeven een goederenbundel $\mathbf{x}$, heet $u^h(\mathbf{x})$ ook wel het nut van consument h in $\mathbf{x}$. Een $N-$tupel van goederenbundels $\mathbf{X} := (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N) \in (\mathbb{R}^n_+)^N$ heet (goederen-)allocatie. De allocatie

$$\mathbf{\Omega} := (\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^N)$$

heet initiële allocatie. We definiëren nog

$$D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq O_k \ (1 \leq k \leq n)\} \subseteq \mathbb{R}^n;$$

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N) \in (\mathbb{R}^n_+)^N \mid \sum_{h=1}^{N} x_k^h = O_k \ (1 \leq k \leq n)\} \subseteq \mathbb{R}^{nN}.$$

De allocaties die tot $\mathcal{A}$ behoren heten realiseerbaar.[3]

Natuurlijk geldt:

☺ **1** De initiële allocatie is realiseerbaar.

Voor elke realiseerbare allocatie $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$ geldt $\mathbf{x}^h \in D$ voor alle h. (Inderdaad: $0 \leq x_k^h \leq \sum_{l=1}^{N} x_k^l = O_k$.) $\mathcal{A}$ is niet leeg want de initiële allocatie is realiseerbaar. Een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ heet inwendig als $0 < x_i^h < O_i$ voor alle h en i. Merk nog op dat $\mathcal{A}$ een compact deel van $\mathbb{R}^{nN}$ is.

Opgave 1 Bewijs dat $\mathcal{A}$ ook een convex deel van $\mathbb{R}^{nN}$ is.

1.2 Gemicroscopiseerde reëele-wereld-structuur

Beschouw N consumenten die n verschillende typen van goederen kunnen consumeren. Deze goederen zijn meetbaar en continu. De consumenten duiden we aan met $1, \dots, N$ en de goedtypen met $1, \dots, n$. Goederen kunnen gecombineerd worden in geodrenbundels $(x_1, \dots, x_n)$. Zo'n combinatie heet een "goederenbundel". Als reëlewereldinterpretatie van een goederennbundel$(x_1, \dots, x_n)$ mag men zich voorstellen dat het daarbij om een zak gaat waar een hoeveelheid x_i van goedtype i inzit. Verder veronderstellen we dat elke consument h een gegeven goederenbundel in zijn bezit heeft; deze zullen we met $\boldsymbol{\omega}^h$ aanduiden en zijn "initiële goederenbundel" noemen. Hoe een consument aan deze goederenbundel komt, doet er hier niet toe. Men mag het geven van een initiële goederenbundel interpreteren als het vastleggen van de eigendoms- of gebruiksrechten. In totaal is dus van goed k een hoeveelheid $O_k := \sum_{h=1}^{N} \omega_k^h$ aanwezig. We veronderstellen dat elke consument iets heeft en dat van elk goed iets aanwezig is.[4] Verder nemen we aan dat de voorkeuren van elke consument h voor de goederenbundels uit de goederenruimte $\mathbb{R}^n_+$ gerepresenteerd kunnen worden door een voor hem specifieke continue nutsfunctie welke we met u^h zullen aanduiden: des te hoger de waarde van die functie in een goederenbundel, des te liever de consument die goederenbundel heeft. In het bijzonder ontleent elke consument h ontleent een nut $u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$ aan de goederenbundel $\boldsymbol{\omega}^h$ die hij bezit. We nemen aan dat de consumenten de goederen die ze bezitten met elkaar kunnen ruilen door middel van zuivere ruil Dat betekent: voor de ruil had consument h een goederenbundel $\boldsymbol{\omega}^h$ en erna de goederenbundel $\mathbf{x}^h$. We maken voor het ruilproces slechts de veronderstelling dat bij het ruilen niets verloren gaat. Er geldt dus $\sum_{h=1}^{N} x_k^h = O_k$ voor alle k. Een microscopisering[5] van het ruilproces kan men zich als volgt voorstellen: elke consument levert zijn goederenbundel op een centrale plaats[6] in, waarbij alle goederen gesorteerd worden, zeg bij wijze van spreken in tonnen gestopt worden. Als dat gebeurd is, zijn er n tonnen: in ton

---

[3] Let op: er staat $\sum_{h=1}^{N} x_k^h = \sum_{h=1}^{N} \omega_k^h$ en niet $\sum_{h=1}^{N} x_k^h \leq \sum_{h=1}^{N} \omega_k^h$ in de definitie van $\mathcal{A}$. In principe is het mogelijk, maar moeilijker, de theorie te ontwikkelen met deze $\leq$-variant; in dat geval spreekt men van een zuivere ruileconomie met vrije opruiming.

[4] Heel wat dat in deze paragraaf gebeurt blijft geldig zonder de veronderstelling dat elke consument iets heeft.

[5] Maar al te sterke vergrotingen hebben niet veel zin, als deze in het model op de een of andere manier niet mathematisch gemodelleerd worden.

[6] Lees eventueel "markt".

k heeft consument h een hoeveelheid ω_k^h gestopt waardoor er uiteindelijk O_k van goed k in die ton komt. Vervolgens neemt elke consument h een hoeveelheid x_k^h uit ton k. Daarna is elke ton weer leeg. Het is hierbij natuurlijk best mogelijk dat een consument bij elke ton evenveel erin stopt als eruit haalt. In principe kan elke allocatie $\mathbf{X} := (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$ die aan de vergelijkingen $\sum_{h=1}^N x_k^h = O_k$ $(1 \leq k \leq n)$ voldoet, optreden als uitkomst van het ruilproces. Zo'n $\mathbf{X}$ heet een "realiseerbare allocatie".

Door te gaan ruilen is het heel goed mogelijk dat na de ruil elke consument beter af is dan ervoor, *i.e.* dat $u^h(\mathbf{x}^h) > u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$ voor elke h. (Bijvoorbeeld in geval van twee consumenten waar consument 1 liever de goederenbundel van consument 2 en consument 2 liever die van 1 heeft.) In dat geval zegt men dat $\mathbf{X}$ een unanieme paretoverbetering van $\mathbf{\Omega} := (\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^N)$ is. En als dat niet lukt, dan kan het misschien wel nog lukken om $u^h(\mathbf{x}^h) \geq u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$ voor elke h met tenminste een ongelijkheid strikt, voor elkaar te krijgen, in welk geval $\mathbf{X}$ een paretoverbetering van $\mathbf{\Omega}$ is.

Voor de consumenten is het dus in het algmeen interessant zijn om hun initiële goederenbundel te ruilen. Over redelijke uitkomsten van het ruilproces hebben we ons nog niet uitgelaten. De vraag die we ons nu stellen is, wat zijn redelijke uitkomsten? Een dergelijke uitkomst, die dus op zijn minst een realiseerbare allocatie is, zullen we ook wel "ruilevenwicht" noemen. Het is goed nog te benadrukken dat de goederen geen prijs hebben. Lang niet elke realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ komt in aanmerking voor het predikaat ruilevenwicht. Op de allereerste plaats is het namelijk redelijk te veronderstellen dat een ruilevenwicht voor geen der consumenten een verslechtering mag inhouden. Immers het is een neoklassiek fundamentele reëlewereldveronderstelling dat ruil vrijwillig en dat consumenten hun nut maximaliseren. Elke consument die bij het ruilproces erop achteruit gaat zal daarom aan dat proces niet deelnemen. Dat een aantal consumenten h eventueel hun goederenbundel $\mathbf{x}^h$ even graag als $\boldsymbol{\omega}^h$ hebben, daar hebben we geen moeite mee. Elke redelijke kandidaat $\mathbf{X}$ voor een ruilevenwicht moet dus in elk geval de eigenschap hebben dat voor geen h mag gelden $u^h(\mathbf{x}^h) < u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$, oftewel: een ruilevenwicht is voor geen consument een verslechtering. Een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ "individueel rationeel voor h" noemend als $u^h(\mathbf{x}^h) \geq u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$ en een realiseerbare allocatie "individueel rationeel" noemend indien deze individueel rationeel voor elke consument is, hebben we dus: een ruilevenwicht is individueel rationeel.

Mooi is het als $\mathbf{X}$ zelfs een paretoverbetering van $\mathbf{\Omega}$ is. Maar ook lang niet elke dergelijke realiseerbare allocatie komt in aanmerking voor de status van ruilevenwicht. Het is namelijk redelijk verder te veronderstellen dat: een ruilevenwicht is pareto-efficiënt. Zou een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ namelijk niet pareto-efficiënt zijn, dan zou er een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y}$ zijn die een paretoverbetering van $\mathbf{X}$ zou zijn.

Conclusie: een ruilevenwicht $\mathbf{X}$ moet dus een pareto-efficiënte realiseerbare allocatie zijn waarin geen enkele consument slechter af is dan in de initiële allocatie $\mathbf{\Omega}$. Kunnen we nog verdere redelijke eisen opleggen? Op deze vraag komen we terug in § 3.

2 Pareto-efficiëntie

2.1 Noties

Definieer de functie $\mathbf{U} : (\mathbb{R}_+^n)^N \to \mathbb{R}^N$ door

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^N) := (u^1(\mathbf{a}^1), \ldots, u^N(\mathbf{a}^N)).$$

De restrictie $\mathbf{U} \restriction \mathcal{A}$ zal de auteur nog <u>nutsmogelijkhedenafbeelding</u> noemen. Met Par duiden we de verzameling der (sterke) maximaliseerders van de nutsmogelijkhedenafbeelding aan en met Par_z de verzameling van haar zwakke maximaliseerders $\top$ 2 $\top$. Dus:

$$\mathrm{Par} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{A} \mid \text{ er is geen } \mathbf{Y} \in \mathcal{A} \text{ met } \mathbf{U}(\mathbf{Y}) > \mathbf{U}(\mathbf{X})\},$$

$$\mathrm{Par}_z = \{\mathbf{X} \in \mathcal{A} \mid \text{ er is geen } \mathbf{Y} \in \mathcal{A} \text{ met } \mathbf{U}(\mathbf{Y}) \gg \mathbf{U}(\mathbf{X})\}.$$

In de economie is het gebruikelijk om Par de (sterke) paretoverzameling en Par_z de zwakke paretoverzameling, te noemen. En verder nog om de elementen van Par pareto-efficiënte allocaties en die van Par_z zwak pareto-efficiënte allocaties te noemen. In plaats van "niet pareto-efficiënt" spreken we ook wel van pareto-inefficiënt en in plaats van "niet zwak pareto-inefficiënt" ook wel van zwak pareto-inefficiënt . Als, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{A}$ en $U(\mathbf{Y}) > U(\mathbf{X})$ is, dan zeggen we dat $\mathbf{Y}$ een paretoverbetering van $\mathbf{X}$ is en als $U(\mathbf{Y})) \gg U(\mathbf{X})$ is, dan zeggen we dat $\mathbf{Y}$ een unanieme paretoverbetering van $\mathbf{X}$ is.

Een belangrijk doel in deze paragraaf is het onderzoeken van de structuur van Par en Par_z. Evident is dat:

☺ **2** De zwakke paretoverzameling bevat de paretoverzameling en in geval $N = 1$ zijn beide verzamelingen gelijk aan elkaar.

☺ **3** De paretoverzameling en de zwakke paretoverzameling zijn ordinale invarianten, d.w.z. deze verzamelingen blijven hetzelfde als we elke nutsfunctie vervangen door een strikt stijgende transformatie van die functie.

Merken we nog op dat het al dan niet pareto-efficiënt zijn van een realiseerbare allocatie ook niets met prijzen te maken heeft, die overigens hier (nog) niet op het "toneel" zijn; in § 4 breiden we het model hier met prijzen uit.

De enige impliciete mathematische veronderstelling is vanaf nu in het hele typoscript:

① elke $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ is continu. !

Deze veronderstelling echter speelt niet overal een wezenlijke rol maar maken we toch maar gemakshalve.[7]

2.2 Niet leeg zijn van de paretoverzamelingen

De pareto-verzameling kan leeg zijn. Maar als de nutsmogelijkhedenafbeelding een maximaliseerder heeft, dan kan dat niet omdat elke maximaliseerder van die afbeelding pareto-efficiënt is.

Opgave 2 Bewijs deze bewering.

Opgave 2 maakt ons nieuwsgierig. Zou ook een realiseerbare allocatie waar een gewogen som van de individuele nutten over de afzonderlijke subjecten maximaal is pareto-efficiënt zijn? Het antwoord is weer "ja" en het bewijs is precies hetzelfde als dat in Opgave 2. Op die manier kan men dus pareto-efficiënte allocaties op een vrij mechanische manier achterhalen. Een voor de hand liggende vraag is of elke pareto-efficiënte toestand op die manier opgespoord kan worden? Het antwoord is: "veelal wel maar niet altijd".

Omdat de verzameling der realiseerbare allocaties $\mathcal{A}$ een niet-leeg en compact deel van $\mathbb{R}^N$ is en de nutsmogelijkhedenafbeelding $\mathbf{U}$ continu is, hebben we ook nog het volgende directe gevolg van ⊤ 4 ⊤:

Stelling 1 Voor een zuivere ruileconomie waarvoor elke nutsfunctie continu is, is de paretoverzameling niet-leeg en de zwakke paretoverzameling zelfs nog compact. ⋄

[7] In Stelling 4 bijvoorbeeld speelt ze geen rol. Toch is continuïteit daar genoemd vanwege onze afspraak om in Stellingen alle impliciete mathematische veronderstelling te expliciteren.

2.3 Zwakke versus sterke pareto-efficiëntie

Steeds onderscheid maken tussen zwakke en sterke paretoverzamelingen kost behoorlijke inspanning. In dit verband komt Stelling 2 als een geschenk uit de hemel:

Stelling 2 Indien elke nutsfunctie continu en sterk stijgend is, dan is de zwakke paretoverzameling gelijk aan de sterke paretoverzameling. $\diamond$

Bewijs.— Als $N = 1$ is dat evident. Stel nu $N > 1$. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dus $\mathbf{X}$ is een zwak pareto-efficiënte allocatie die niet sterk pareto-efficiënt is. Dat laatste betekent dat er een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y}$ is met $\mathbf{U}(\mathbf{Y}) > \mathbf{U}(\mathbf{X})$. Dan is $u^l(\mathbf{y}^l) \geq u^l(\mathbf{x}^l)$ voor alle l en is er een consument m met $u^m(\mathbf{y}^m) > u^m(\mathbf{x}^m)$. Omdat u^m stijgend is, is $\mathbf{y}^m > \mathbf{0}$ Omdat u^m continu is, is er een $\alpha \in \,]0, 1\,[$ zodanig dat

$$u^m((1-\alpha)\mathbf{y}^m) > u^m(\mathbf{x}^m).$$

Definieer nu $\mathbf{Z} := (\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^N)$ door

$$\mathbf{z}^h := \mathbf{y}^h + \frac{\alpha}{N-1}\mathbf{y}^m \text{ als } h \neq m, \;\; \mathbf{z}^m := (1-\alpha)\mathbf{y}^m.$$

Dan is $\mathbf{Z} \in \mathcal{A}$ want voor alle l geldt $\mathbf{z}^l \in \mathbb{R}^n_+$ en voor elke k geldt

$$\sum_{h=1}^{N} z_k^h = z_k^m + \sum_{h=1, h\neq m}^{N} z_k^h = (1-\alpha)\mathbf{y}_k^m + \sum_{h=1, h\neq m}^{N} (y_k^h + \frac{\alpha}{N-1} y_k^m) = \sum_{h=1}^{N} y_k^h = O_k.$$

Er geldt $\mathbf{z}^h > \mathbf{y}^h$ voor alle $h \neq m$. Omdat elke nutsfunctie sterk stijgend is, volgt voor alle $h \neq m$ dat $u^h(\mathbf{z}^h) > u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$ en vandaar $u^h(\mathbf{z}^h) > u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle h en dus $\mathbf{U}(\mathbf{Z}) \gg \mathbf{U}(\mathbf{X})$ hetgeen een tegenspraak is met $\mathbf{X} \in \mathrm{Par}_z$. Q.E.D.

Merken we nog op dat in Stelling 2 eigenlijk slechts de eigenschappen van de nutsfuncties op D ertoe doen. Omdat cd-nutsfuncties niet sterk stijgend zijn, is Stelling 2 niet van toepassing op een zuivere ruileconomie waar tenminste één der consumenten een cd-nutsfunctie heeft. In dat verband is de volgende Propositie nuttig.

Propositie 1 Stel elke nutsfunctie is continu en strikt stijgend, constant op $\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^n_{++}$ en in elke niet-inwendige goederenbundel groter dan die constante. Dan is de zwakke paretoverzameling gelijk aan de sterke paretoverzameling. $\diamond$

Opgave 3 Bewijs Propositie 1 door geschikte aanpassing van het bewijs van Stelling 2.

Opgave 4 Beschouw een zuivere ruileconomie in geval $n = 1$ met nutsfuncties die sterk stijgend op D zijn. Bewijs met de hand[8] dat $\mathrm{Par} = \mathrm{Par}_z$ en bepaal Par.

Voorbeeld 1 geeft een concreet voorbeeld waar de sterke en zwakke paretoverzameling verschillend zijn.

2.4 Doos van Edgeworth

Bekijken we de situatie van twee consumenten en twee goedtypen. Laten we romantisch zijn en de consumenten met A, B in plaats van met $1, 2$ aanduiden. (Dat zullen we overigens vaker in zo'n geval doen.) Een realiseerbare allocatie is dan te representeren door twee punten in $\mathbb{R}^2_+$ en dus ook met één punt in $\mathbb{R}^4_+$. Maar als $((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B)) \in \mathbb{R}^4_+$ een realiseerbare allocatie is, dan geldt $x_1^A + x_1^B = O_1$ en $x_2^A + x_2^B = O_2$ en deze twee vergelijkingen reduceren het "aantal onafhankelijke

[8] Zonder zich dus op Stelling 2 te beroepen.

coördinaten" tot twee. Een geometrische vertaling van deze opmerking heeft een naam gekregen: de doos van Edgeworth.[9] Deze "doos" is niks anders dan de hierboven al gedefinieerde D in geval $N = n = 2$:

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq O_1,\ 0 \leq x_2 \leq O_2\}.$$

De doos van Edgeworth betreft dus een rechthoek (rand inclusief inwendige) met als horizontale lengte de totale aanwezige hoeveelheid van goed 1 en als verticale lengte de totale aanwezige hoeveelheid van goed 2. De linkerbenedenhoek (ook wel zuidwesthoek te noemen) van de doos is in $(0, 0)$ gezet. De verzameling der realiseerbare allocaties correspondeert met de verzameling der punten in de doos door voor A vanuit de linkerbenedenhoek en voor B vanuit de rechterbovenhoek zijn goederenhoeveelheid te meten.[10] Preciezer: als $((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B))$ een realiseerbare allocatie is, dan is (x_1^A, x_2^A) het corresponderende punt in de doos en als (m_1, m_2) een punt in de doos is, dan is $((m_1, m_2), (O_1 - m_1, O_2 - m_2))$ de corresponderende realiseerbare allocatie. We zullen vaak een realiseerbare allocatie identificeren met het corresponderende punt in de Doos van Edgeworth. Een speciaal punt in de doos is het punt (ω_1^A, ω_2^A) dat correspondeert met de initiële allocatie.

We hebben nu een "lege doos". Maar natuurlijk kunnen indifferentieverzamelingen van beide consumenten in de doos getekend worden en net zo de paretoverzameling.[11] Als alles even meezit zijn niet alleen de indifferentieverzamelingen van beide consumenten continue krommen in $\mathbb{R}^2_+$ maar is ook de paretoverzameling een continue kromme in $\mathbb{R}^2_+$; vele economisten spreken hier van contractkromme.[12] Bij alle dozen die we hieronder tekenen, zullen we van indifferentiekrommen uitgaan. Tenzij anders vermeld hebben de indifferentiekrommen van A steeds de "bolle kant naar beneden" en die van B de "bolle kant naar boven".

Alhoewel de (gevulde) doos van Edgeworth op het eerste gezicht niets anders dan een simpel figuurtje zou kunnen lijken, is het tegenovergestelde het geval: het is een krachtig grafisch hulpmiddel waarmee we op een handige manier snel een weelde aan niet-triviale inzichten kunnen verkrijgen.

Voor een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ noteren we met $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ het corresponderende punt in de doos van Edgeworth:

$$\mathcal{C}^A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u^A(x_1, x_2) = u^A(m_1, m_2)\},$$

$$\mathcal{C}^B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid O_1 - x_1 \geq 0,\ O_2 - x_2 \geq 0,\ u^B(O_1 - x_1, O_2 - x_2) = u^B(O_1 - m_1, O_2 - m_2)\},$$

$$\mathcal{O}^A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u^A(x_1, x_2) > u^A(m_1, m_2)\},$$

$$\mathcal{O}^B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid O_1 - x_1 \geq 0,\ O_2 - x_2 \geq 0,\ u^B(O_1 - x_1, O_2 - x_2) > u^B(O_1 - m_1, O_2 - m_2)\}.$$

Merk op dat elk dezer vier verzamelingen niet per se een deelverzameling van de doos is; zelfs is het bijvoorbeeld mogelijk dat $\mathcal{C}^B$ punten buiten $\mathbb{R}^2_+$ bevat. $\mathcal{O}^A$ is de verzameling der goederenbundels die consument A liever heeft dan zijn goederenbundel in $\mathbf{X}$ en $\mathcal{C}^A$ is de verzameling der goederenbundels die A even graag heeft als zijn goederenbundel in $\mathbf{X}$. Maar overeenkomstige beweringen voor B zijn niet waar. Merk op dat $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^A \cap \mathcal{C}^B$, $\mathbf{m} \notin \mathcal{O}^A$ en $\mathbf{m} \notin \mathcal{O}^B$.

Met behulp van deze vier verzamelingen kunnen we nu een geometrisch criterium voor (zwakke) pareto-efficiënte allocaties formuleren:

☺ **4** $\mathbf{X}$ is zwak pareto-efficiënt dan en slechts dan als $\mathcal{O}^A \cap \mathcal{O}^B = \emptyset$ en $\mathbf{X}$ is pareto-efficiënt dan en slechts dan als $(\mathcal{O}^A \cup \mathcal{C}^A) \cap \mathcal{O}^B = \emptyset$ en $(\mathcal{O}^B \cup \mathcal{C}^B) \cap \mathcal{O}^A = \emptyset$.

---

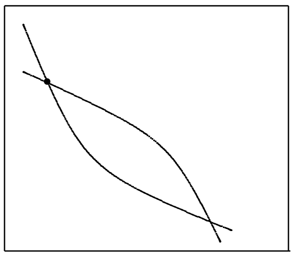
[9] Francis Edgeworth (1845-1926), Ier en econoom. Leverde heel wat bijdragen aan de economie, bijvoorbeeld de noties van nutsfunctie, indifferentiekromme, doos van Edgeworth (gepresenteerd in zijn artikel uit 1881), contractkromme en kern hebben we aan hem te danken. Zijn werk is tegenwoordig vooral van belang gebleken voor de speltheorie en de algemene evenwichtstheorie. Merken we tenslotte nog op dat het niet helemaal duidelijk schijnt te zijn aan wie de eer toekomt aangaande de "doos". Ook Bowley (1869-1957) en Pareto worden in dit verband genoemd.

[10] Het gaat daarbij dus eigenlijk om twee figuren die samengevoegd zijn tot één figuur.

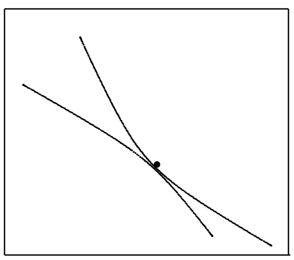
[11] Let even op: het gaat hierbij dan om deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2_+$.

[12] Beter echter is het deze naam te reserveren voor elementen van de kern (zie § 3).

Figuren 1 en 2 illustreren ☺ 4 geometrisch. • is de realiseerbare allocatie waarvoor (een deel van) de bijbehorende (krommen) $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$ getekend zijn. In Figuur 1 is de verzameling $\mathcal{O}^A \cap \mathcal{O}^B$ niet leeg: ze is immers gelijk aan het inwendige van het “lensje” ingesloten door beide krommen. Dus • daar is zwak pareto-inefficiënt en dus ook sterk pareto-inefficiënt. In Figuur 2 zijn de verzamelingen $(\mathcal{O}^A \cup \mathcal{C}^A) \cap \mathcal{O}^B$ en $(\mathcal{O}^B \cup \mathcal{C}^B) \cap \mathcal{O}^A$ leeg. Dus • daar is pareto-efficiënt en dus ook zwak pareto-efficiënt.



Figuur 1: Pareto-inefficiënte allocatie.



Figuur 2: Pareto-efficiënte allocatie.

2.5 Niet-inwendige pareto-efficiënte allocaties

We gaan nu op zoek naar niet-inwendige pareto-efficiënte allocaties, *i.e.* naar elementen $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^l, \ldots, \mathbf{x}^N)$ die pareto-efficiënt zijn en waarvoor er een h en i zijn zodanig dat $x_i^h = 0$ of $x_i^h = O_i$.

We beginnen met de volgende simpele constatering: voldoende voor het pareto-efficiënt zijn van een allocatie is dat er een consument i is waarvoor het nut in elke andere allocatie lager is. In dit verband zijn in het bijzonder dictatorallocaties interessant: we noemen de realiseerbare allocatie waar consument i de goederenbundel $(O_1, \ldots, O_n)$ en de andere consumenten de goederenbundel $(0, \ldots, 0)$ bevatten, de dictatorallocatie van i. De dictatorallocatie van i is dus de allocatie waar i alles heeft en de overige consumenten niets hebben. Omdat bij overgang van de dictatorallocatie van i naar een andere allocatie, de goederenbundel van i, verandert volgt:

☻ **5** Als voor consument i de goederenbundel $(O_1, \ldots, O_n)$ de unieke maximaliseerder is van de functie $u^i : D \to \mathbb{R}$, dan bevat de paretoverzameling de dictatorallocatie van i.

Een gevolg van ☺ 5 is:

☻ **6** Als, in geval $N = n = 2$, (O_1, O_2) de unieke maximaliseerder is van $u^A, u^B : D \to \mathbb{R}$, dan bevat de paretoverzameling de linkerbenedenhoek en de rechterbovenhoek van de doos van Edgeworth.

Een belangrijk speciaal geval waar aan de voorwaarden van ☺ 5 voldaan is, is de situatie waar de nutsfunctie u^i sterk stijgend is.

Opgave 5 Geef in geval $N = n = 2$ een voorbeeld van een zuivere ruileconomie met strikt stijgende nutsfuncties waar de dictatorallocatie van consument A niet pareto efficient is.

Ook is aan de voorwaarden van ☺ 5 voldaan in geval de nutsfuncties cd-functies zijn, alhoewel deze niet sterk stijgend op D zijn. In dat geval kunnen we voor $N = n = 2$ nog meer zeggen zoals de volgende opgave aantoont.

Opgave 6 Stel $N = n = 2$ en voor elke consument h geldt

– de goederenbundel (O_1, O_2) is de unieke maximaliseerder van de functie $u^h : D \to \mathbb{R}$;

– u^h is stijgend en op $D \cap \mathbb{R}^2_{++}$ sterk stijgend;

– voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ met $x_i = y_i = 0$ voor een i geldt $u^h(\mathbf{x}) = u^h(\mathbf{y})$.

Bewijs dat er dan precies 2 niet-inwendige pareto-efficiënte realiseerbare allocaties zijn, namelijk beide dictator-allocaties.

Opgave 7 Stel $N = n = 2$ en elke consument heeft een cd-nutsfunctie. Onderzoek welke punten op de rand van de doos van Edgeworth sterk pareto-efficiënt zijn. En welke zijn zwak pareto-efficiënt?

Opgave 8 Beschouw een zuivere ruileconomie met $N = n = 2$. Bepaal de sterke en zwakke paretoverzameling voor de volgende gevallen.

a. u^A is strikt stijgend in x_1 en strikt dalend in x_2 en u^B is strikt dalend in x_1 en strikt stijgend in x_2.

b. u^A is strikt stijgend in x_1 en constant in x_2 en u^B is strikt stijgend in x_2 en constant in x_1.

Voorbeeld 1 In het geval $u^A(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$, $u^B(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ en $O_1 = O_2$, bestaat de paretoverameling uit de rechterbenedenhoek en de linkerbovenhoek in de Doos van Edgeworth. En de zwakke paretoverzameling is de hele rand van de Doos van Edgeworth.

Inderdaad, $R := O_1 = O_2$ zettend, geldt dat in elk punt van de doos het nut van elke consument ten hoogste R is en dat op elk punt van de rand er een consument is met nut R. Dat impliceert dat elk punt van de rand zwak pareto-efficiënt is. In de rechterbenedenhoek en de linkerbovenhoek heeft elke consument nut R. In een inwendig punt van de doos heeft elke consument nut kleiner dan R. Dit impliceert dat elk inwendig punt van de doos zwak pareto-inefficiënt is. Dat bewijst de tweede bewering. Elk inwendig punt in de doos is dus ook sterk pareto-inefficiënt. Omdat in elk punt van de rand met uitzondering van de rechterbenedenhoek en de linkerbovenhoek er een consument is met nut kleiner dan R volgt dat alleen die hoeken sterk pareto-efficiënt zijn en dus de eerste bewering. $\diamond$

Dat het resultaat van Voorbeeld 1 niet meer geldig is, indien $O_1 \neq O_2$ toont het voorbeeld waar $O_1 = 100$ en $O_2 = 2$ aan. Daar is, zoals men snel inziet, de allocatie $((34, 1), (66, 1))$ pareto-efficiënt (en inwendig).

Opgave 9 Beschouw het geval waar $u^A(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$, $u^B(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ en $O_1 \geq O_2$. Bewijs dat de paretoverzameling bestaat uit de rechterbenedenhoek, de linkerbovenhoek en $\{(x_1, x_2) \in D \mid x_1 > x_2 \text{ en } x_2 > x_1 - (O_1 - O_2)\}$.

Opgave 10 Beschouw het geval $N = n = 2$ met solow-nutsfuncties $u^A(x_1, x_2) = \alpha_1^A x_1 + \alpha_2^A x_2$ en $u^B(x_1, x_2) = \alpha_1^B x_1 + \alpha_2^B x_2$. Bewijs dat in geval $\alpha_2^A / \alpha_1^A = \alpha_2^B / \alpha_1^B$ elke realiseerbare allocatie pareto-efficiënt is.

Opgave 11 Stel $N = n = 2$, $u^A = \min(x_1, x_2)$ en u^B is sterk stijgend. Bewijs dat dan elke toegestane allocatie $((x, x), (O_1 - x, O_2 - x))$ met $0 \leq x \leq \min(0_1, 0_2)$ pareto-efficiënt is.

2.6 Inwendige pareto-efficiënte allocaties

Voorbeeld 2 Beschouw een zuivere ruileconomie met $N = n = 2$. Stel $u^A(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en $u^B(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$, $\omega_1^A = 2$, $\omega_2^A = 2$, $\omega_1^B = 3$, $\omega_2^B = 1$. Dan $O_1 = 5$ en $O_2 = 3$. De allocatie $\mathbf{X} := \Big((1,2);(4,1)\Big)$ is realiseerbaar. Dat $\mathbf{X}$ niet pareto-efficiënt is zien we door deze te vergelijken met de realiseerbare allocatie $\mathbf{Y} := \Big((2,1),(3,2)\Big)$: in $\mathbf{X}$ is het nut van A gelijk aan 2 en dat van B gelijk aan $4^{1/3}$, terwijl in $\mathbf{Y}$ het nut van A gelijk aan 2 is en dat van B gelijk aan $12^{1/3}$ is. $\diamond$

Maar hoe kunnen we nu in concrete gevallen als Voorbeeld 2 de pareto-efficiënte allocaties bepalen? De volgende twee stellingen laten licht schijnen op deze vraag als we ons beperken tot inwendige realiseerbare allocaties.

Stelling 3 Stel elke nutsfunctie u^h is continu en concaaf. Stel $\mathbf{X}$ is een realiseerbare allocatie. Dan: $\mathbf{X}$ is zwak pareto-efficiënt $\Leftrightarrow$ er bestaat $(\lambda^1, \dots, \lambda^N) > \mathbf{0}$ zodanig dat $\mathbf{X}$ een maximaliseerder is van de functie $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mathbf{X} \mapsto \sum_{h=1}^N \lambda^h u^h(\mathbf{x}^h)$. $\diamond$

Bewijs.— De functie in kwestie is $W_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=1}^N \lambda^h U_h \restriction \mathcal{A}$. Als $\mathbf{X}$ een maximaliseerder van $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ is, dan is volgens $\top$ 6 $\top$ $\mathbf{X}$ zwak pareto-efficiënt.

Stel nu omgekeerd dat $\mathbf{X}$ zwak pareto-efficiënt is. Opmerkend dat de $U_h : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ concaaf zijn, impliceert $\top$ 7 $\top$ dat er $(\lambda^1, \dots, \lambda^N) > \mathbf{0}$ bestaat zodanig dat $\mathbf{X}$ een maximaliseerder van $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ is. Q.E.D.

Een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y}$ is pareto-efficiënt d.e.s.d.a. $\mathbf{Y}$ een sterke maximaliseerder van $U \restriction \mathcal{A}$ is. Vanwege $\top$ 8 $\top$ is dit equivalent met dat voor elke $1 \leq i \leq N$, $\mathbf{Y}$ een maximaliseerder is van het maximalisatieprobleem

$$\underset{\substack{\mathbf{X} \in \mathbb{R}_+^{n\,N} \\ U_h(\mathbf{X}) \geq U_h(\mathbf{Y}) \ (h \in \mathcal{N} \setminus \{i\}),\ \sum_{h=1}^N x_k^h = O_k \ (1 \leq k \leq n)}}{\text{MAX}} \quad U_i(\mathbf{X}). \tag{1}$$

Stelling 4 Stel $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$ is een inwendige pareto-efficiënte allocatie. Stel elke nutsfunctie u^h is continu en op een open omgeving van $\mathbf{x}^h$ in $\mathbb{R}_{++}^n$ continu differentieerbaar met in $\mathbf{y}^h$ geen enkele partiële afgeleide gelijk aan 0. Dan geldt voor alle h, l en i, j dat $\text{MSV}_{ij}^h(\mathbf{x}^h) = \text{MSV}_{ij}^l(\mathbf{x}^l)$. $\diamond$

Bewijs.— Zij V^h zo'n omgeving van $\mathbf{x}^h$ en zet $V := V^1 \times \cdots \times V^N$. Beschouw de functies $U_h : V \to \mathbb{R}$ $(1 \leq h \leq N)$, *i.e.*

$$U_h(\mathbf{A}) = u^h(\mathbf{a}^h).$$

Vanwege de pareto-efficiëntie van $\mathbf{X}$ is $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$ een maximaliseerder van het maximalisatieprobleem

$$\underset{\substack{\mathbf{A} \in V \\ U_h(\mathbf{A}) = U_h(\mathbf{X}) \ (2 \leq h \leq N),\ \sum_{h=1}^N a_k^h = O_k \ (1 \leq k \leq n)}}{\text{MAX}} \quad U_1(\mathbf{A}).$$

We passen hierop de Multiplicatorenstelling van Lagrange met lagrange-functie

$$L(\mathbf{A}) := U_1(\mathbf{A}) - \sum_{h=2}^N \lambda_h (U_h(\mathbf{A}) - U_h(\mathbf{X})) - \sum_{k=1}^n \mu_k (\sum_{h=1}^N a_k^h - O_k)$$

toe, *i.e.*

$$L(\mathbf{A}) = u^1(\mathbf{a}^1) - \sum_{h=2}^N \lambda_h (u^h(\mathbf{a}^h) - u^h(\mathbf{x}^h)) - \sum_{k=1}^n \mu_k (\sum_{h=1}^N a_k^h - O_k).$$

Aan de rangconditie is voldaan omdat $\nabla U_2, \dots, \nabla U_N, \nabla \sum_{h=1}^N a_1^h, \dots, \nabla \sum_{h=1}^N a_n^h$, geëvalueerd te $\mathbf{Y}$ lineair onafhankelijk zijn (zie Opgave 12). De partiële afgeleide van L m.b.t. a_i^h gelijk aan nul zettend in $\mathbf{X}$, geeft voor elke h en i

$$\lambda_h \frac{\partial u^h}{\partial x_i^h}(\mathbf{x}^h) + \mu_i = 0,$$

waar $\lambda_1 := 1$. Met $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ geeft dit

$$-\boldsymbol{\mu} = Du^1(\mathbf{x}^1) = \lambda_2 Du^2(\mathbf{x}^2) = \cdots = \lambda_N Du^N(\mathbf{x}^N).$$

Omdat in $\mathbf{x}^1$ geen enkele partiële afgeleide van u^1 gelijk aan 0 is, volgt dat geen enkele μ_i en geen enkele λ_h gelijk aan 0 is. Dit impliceert het gewenste. Q.E.D.

Dus:

☺ **7** Als alles even meezit, is in een inwendige pareto-efficiënte allocatie elke marginale substitieverhouding voor elke consument dezelfde.

Opgave 12 Bewijs dat in het bovenstaande bewijs $\nabla U_2, \ldots, \nabla U_N, \nabla \sum_{h=1}^N x_1^h, \ldots, \nabla \sum_{h=1}^N x_n^h$, geëvalueerd te $\mathbf{Y}$ lineair onafhankelijk zijn.

Voor het geval dat $N = n = 2$ impliceert Stelling 4 dus dat in een inwendige pareto-efficiënte realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ de gelijkheid $\mathrm{MSV}^A = \mathrm{MSV}^B$ geldt. Dat komt neer op de volgende vergelijking

$$\frac{\frac{\partial u^A}{\partial x_1}(x_1^A, x_2^A)}{\frac{\partial u^A}{\partial x_2}(x_1^A, x_2^A)} = \frac{\frac{\partial u^B}{\partial x_1}(x_1^B, x_2^B)}{\frac{\partial u^B}{\partial x_2}(x_1^B, x_2^B)}, \tag{2}$$

Ook geldt natuurlijk

$$x_1^A + x_1^B = O_1, \quad x_2^A + x_2^B = O_2.$$

Voor $\mathbf{X}$ hebben we zo drie vergelijkingen in de 4 onbekenden $x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B$. Generalisatie daarvan leidt voor willekeurige N en n tot de $(N-1)(n-1) + n$ vergelijkingen

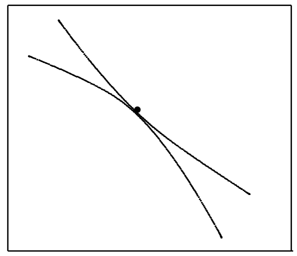
$$\frac{\partial u^1}{\partial x_i} / \frac{\partial u^1}{\partial x_n} = \cdots = \frac{\partial u^j}{\partial x_i} / \frac{\partial u^j}{\partial x_n} \ (1 \le i \le n-1, \ 2 \le j \le N), \ \sum_{h=1}^N x_i^h = O_i \ (1 \le i \le n)$$

in de Nn onbekenden x_i^h $(1 \le h \le N, \ 1 \le i \le n)$. Voor $N = n = 3$ hebben we dus bijvoorbeeld 7 vergelijkingen in 9 onbekenden.

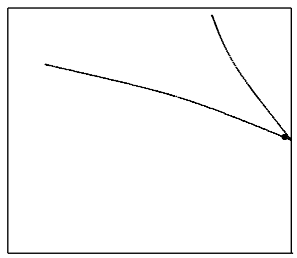
Voorbeeld 3 Stel $N = n = 2$, $u^A = u^B = x_1^2 + x_2^2$ en $\boldsymbol{\omega}^1 = \boldsymbol{\omega}^2 = (1/2, 1/2)$. Daar zijn de vergelijkingen in kwestie: $x_1^A/x_2^A = x_1^B/x_2^B$, $x_1^A + x_1^B = 1$ en $x_2^A + x_2^B = 1$. Dus bijvoorbeeld $x_1^A = x_1^B = x_2^A = x_2^B = 1/2$ voldoet aan deze vergelijkingen. Maar de (inwendige) realiseerbare allocatie $\Big((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)\Big)$ is niet pareto-efficiënt: omdat $u^A(1, 0) = 1 > 1/2 = u^A(1/2, 1/2)$ en $u^B(0, 1) = 1 > 1/2 = u^B(1/2, 1/2)$, is de realiseerbare allocatie $\Big((1, 0), (0, 1)\Big)$ een paretoverbetering van $\Big((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)\Big)$. ⋄

Voorbeeld 3 toont duidelijk aan dat men oppassen moet om aan Stelling 4 niet meer toe te schrijven dan deze vermag: als in een realiseerbare allocatie elke marginale substitutieverhouding voor elke consument gelijk is, dan hoeft dat niet te betekenen dat die allocatie pareto-efficiënt is. Het probleem dat zich hier voordoet is geometrisch gemakkelijk te illustreren, en wel weer met Figuur 2 als we afspreken dat de onderste indifferentiekromme nu bij A en de bovenste bij B hoort. • is daar dan nu een inwendige realiseerbare allocatie waar $\mathrm{MSV}^A = \mathrm{MSV}^B$ is, maar die pareto-inefficiënt is.

En de gevulde doos van Edgeworth in Figuur 4 toont aan dat men Stelling 4 niet zonder meer kan toepassen op niet-inwendige allocaties.



Figuur 3: Pareto-inefficiënte allocatie waar marginale substitutieverhoudingen gelijk zijn.



Figuur 4: Pareto-efficiënte allocatie waar marginale substitutieverhoudingen ongelijk zijn.

Opgave 13 Bepaal in Voorbeeld 3 de pareto-efficiënte allocaties.

Stelling 5 Stel elke nutsfunctie u^h is continu en quasi-concaaf en op $\mathbb{R}^n_{++}$ continu differentieerbaar met louter positieve partiële afgeleiden. Dan is elke inwendige realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ waarin elke marginale substitutieverhouding voor elke consument gelijk is, i.e. $\mathrm{MSV}^h_{ij}(\mathbf{x}^h) = \mathrm{MSV}^{h'}_{ij}(\mathbf{x}^h)$ voor alle h, h', i, j, pareto-efficiënt. $\diamond$

Bewijs.— We moeten bewijzen dat, gegeven $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathbf{Y}$ een maximaliseerder van het maximalisatieprobleem (1) is, *i.e.* van

$$\mathrm{MAX}_{\substack{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\,N}_{+} \\ -U_h(\mathbf{X}) \leq -U_h(\mathbf{Y}) \ (h \neq i),\ \sum_{h=1}^N x^h_k = O_k \ (1 \leq k \leq n)}} U_i(\mathbf{X})$$

is. Als $N = 1$, dan is dat evident. Stel nu $N \geq 2$. Zij $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^N)$ zo'n allocatie. We bewijzen het gewenste voor $i = 1$; voor $i \neq 1$ gaat het analoog.

Voor alle geldt h dat $\frac{\partial u^h}{\partial x_i}(\mathbf{y}^h)/\frac{\partial u^h}{\partial x_1}(\mathbf{y}^h) = \frac{\partial u^1}{\partial x_i}(\mathbf{y}^1)/\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(\mathbf{y}^1) \ =: \ \alpha_i$. Dus $\frac{\partial u^h}{\partial x^i}(\mathbf{y}^h) = \alpha_i \frac{\partial u^h}{\partial x_1}(\mathbf{y}^h)$. Daaruit $(\nabla u^h)(\mathbf{y}^h) = \frac{\partial u^h}{\partial x_1}(\mathbf{y}^h)(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Er volgt dat er positieve getallen $\lambda_2, \ldots, \lambda_N$ bestaan zodanig dat

$$Du^1(\mathbf{y}^1) = \lambda_2 Du^2(\mathbf{y}^2) = \cdots = \lambda_N Du^N(\mathbf{y}^N).$$

Daaruit

$$Du^1(\mathbf{y}^1) - \frac{\lambda_2}{N-1} Du^2(\mathbf{y}^2) - \cdots - \frac{\lambda_N}{N-1} Du^N(\mathbf{y}^N) = 0.$$

Uit geschikte toepassing van een resultaat uit de theorie der lineaire programmering volgt dat $\mathbf{Y}$ een maximaliseerder van het maximalisatieprobleem

$$\mathrm{MAX}_{\substack{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\,N}_{+} \\ -U_h(\mathbf{X}) \leq -U_h(\mathbf{Y}) \ (2 \leq h \leq N),\ \sum_{h=1}^N x^h_k = O_k \ (1 \leq k \leq n)}} U_1(\mathbf{X})$$

is. Q.E.D.

Stelling 6 gaat om een soortgelijk (maar niet equivalent) resultaat als Stelling 5.

Voorbeeld 4 Beschouw een zuivere ruileconomie in geval $N = n = 2$ met genormaliseerde cd-nutsfuncties $u^A = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ en $u^B = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2}$. Volgens Opgave 7 zijn er precies twee niet-inwendige pareto-efficiënte allocaties, namelijk de twee dictator-allocaties. Stelling 4 is van toepassing. Stel $((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B))$ is een inwendige pareto-efficiénte allocatie. Met behulp van (2) vinden we

$$x_2^A = \frac{\alpha_2 \gamma_1 O_2 x_1^A}{\alpha_1 \gamma_2 O_1 + (\gamma_1 - \alpha_1) x_1^A}. \quad (3)$$

Hier is $0 < x_1^A < O_1$. Omdat de twee nutsfuncties quasi-concaaf zijn, is Stelling 5 van toepassing. Deze stelling garandeert dat de met (2) gevonden allocaties pareto-efficiënt zijn. Door in bovenstaande formule $0 \leq x_1^A \leq O_1$ te nemen, worden ook bovenstaande twee niet-inwendige allocaties meegenomen. Aan deze formule zien we dat we te maken hebben met een contractkromme.

Als $\alpha_1 = \gamma_1$ dan is de paretoverzameling dus gelijk aan de diagonaal (die in de linkerbenedenhoek begint en in de rechterbovenhoek eindigt) in de doos van Edgeworth: $x_2^A = \frac{O_2}{O_1} x_1^A$. $\diamond$

Merken we nog op dat in Voorbeeld 3 de twee nutsfuncties niet concaaf zijn.

Opgave 14 Waar of onwaar? In een zuivere ruileconomie met 2 consumenten 2 goederen en met gcd-nutsfuncties geldt voor elke pareto-efficiënte allocatie $\mathbf{X}$ en realiseerbare allocatie $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$ dat $u^1(\mathbf{y}^1) < u^1(\mathbf{x}^1)$ of $u^2(\mathbf{y}^2) < u^2(\mathbf{x}^2)$.

Opgave 15 Geef een alternatief bewijs van de uitspraak in Opgave 10 met behulp van Stelling 5.

Opgave 16 Bepaal de pareto-efficiënte allocaties voor een zuivere ruileconomie in geval $N = n = 2$ waar elke consument de nutsfunctie $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ heeft.

In Opgave 16 en ook in Voorbeeld 4 in geval $u^A = u^B$ zagen we dat de contractkromme gelijk is aan de diagonaal van linksonder naar rechtsboven in de doos van Edgeworth. In de volgende Opgave bekijken we dit nader.

Opgave 17 a. Stel beide consumenten hebben dezelfde quasi-concave homogene nutsfunctie u. Bewijs dat dan, als alles even meezit, de contractkromme gelijk is aan de diagonaal van linksonder naar rechtsboven in de doos van Edgeworth.

b. Blijft zo'n resultaat nog geldig indien we de eis van quasi-concaviteit laten vallen?

Hierboven hebben we gezien dat concaviteit van nutsfuncties een welkome eigenschap is. In het volgende voorbeeld zijn de twee nutsfuncties concaaf, maar desondanks zijn er toch nog dingen die voor moeilijkheden zorgen.[13]

Voorbeeld 5 Stel $u^A(x_1, x_2) = 3x_1\sqrt{x_2}, u^B(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2x_2, \boldsymbol{\omega}^A = (100, 200), \boldsymbol{\omega}^B = (200, 100)$. Toepassen van (2) leidt tot de vergelijking $2x_2^A/x_1^A = 1/(4\sqrt{300 - x_1^A})$ en dus tot $x_2^A = x_1^A/(8\sqrt{300 - x_1^A})$. Dat het hierbij niet om de contractkromme kan gaan, kan men als volgt inzien: als x_1^A naar 300 nadert, dan nadert x_2^A naar oneindig, terwijl x_2^A niet groter dan 300 mag worden. Het ligt voor de hand dat de bovenstaande formule voor de contractkromme in orde is zolang $x_2^A < 300$ is; inderdaad in dat geval is Stelling 5 van toepassing. Men kan nagaan dat die formule een stijgende kromme geeft die de waarde 300 bereikt voor $x_1^A = 299,98...$ Dus slechts voor waarden van x_1^A in het kleine segment $[299,98.., 300]$ is de formule niet juist. Het ligt voor de hand dat daar dan verder $x_2^A = 300$ (wat inderdaad het geval is, zoals een nadere analyse aantoont). $\diamond$

[13] Deze moeilijkheden komen vanwege het feit dat u^B quasi-lineair is.

Opgave 18 Stel $N = n = 2$, $u^A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $u^B(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Stel $(7, 2)$ is de initiële goederenbundel van A en $(3, 3)$ is dat voor B.

a. Bepaal de inwendige pareto-efficiënte allocaties.

b. Bepaal de niet-inwendige pareto-efficiënte allocaties.

2.7 Analyse in de doos van Edgeworth

In deze deelparagraaf is steeds $N = n = 2$.

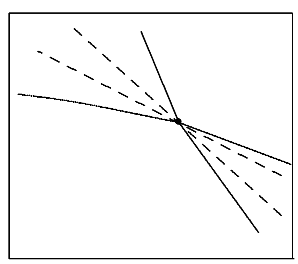
Beschouw de deelverzamelingen $\mathcal{O}^A, \mathcal{C}^A, \mathcal{O}^B, \mathcal{C}^B$ in de doos van Edgeworth. $\mathcal{O}^A$ is gelijk aan de strikte bovenniveauverzameling van de functie $u^A : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{m}$. Als u^A quasi-concaaf is, is deze dus convex. Dit leidt tot:

☺ **8** Als u^h quasi-concaaf is, dan is $\mathcal{O}^h$ convex.

Opgave 19 Bewijs dat ☺ 8 inderdaad ook voor $h = B$ geldt. En laat zien dat als u^h strikt quasi-concaaf is, dat dan $\mathcal{O}^h$ strikt convex is.

We merken nog op dat $\mathcal{O}^A$ geen open deel van $\mathbb{R}^2$ hoeft te zijn, maar dat het wel een open deel van $\mathbb{R}^2_+$ is.

We voeren nu wat *ad hoc* terminologie in: gegeven een punt $\mathbf{m}$ in de doos van Edgeworth, zeggen we dat de verzamelingen $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$ elkaar in $\mathbf{m}$ raken als er een lijn door $\mathbf{m}$ (*i.e.* affien hypervlak in $\mathbb{R}^2$) bestaat die de verzamelingen $\mathcal{O}^A$ en $\mathcal{O}^B$ strikt [14] Zo'n lijn noemen we nog een gemeenschappelijke raaklijn door $\mathbf{m}$ aan $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$. Het is best mogelijk dat er meerdere van dergelijke raaklijnen bestaan zoals Figuur 5 moge aantonen.



Figuur 5: Meerdere gemeenschappelijke raaklijnen.

☺ **9** Stel u^A en u^B zijn quasi-concaaf. Zij $\mathbf{m}$ een punt in de doos van Edgeworth. Dan raken $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$ elkaar in $\mathbf{m}$ dan en slechts dan als $\mathcal{O}^A \cap \mathcal{O}^B = \emptyset$.

Bewijzen van ☺ 9 kan tegenvallen als men niet een geschikte scheidingsstelling bij de hand heeft.[15] Welnu, als $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$ elkaar in $\mathbf{m}$ raken, dan is er per definitie een rechte lijn die $\mathcal{O}^A$ en $\mathcal{O}^B$ strikt scheidt en dus hebben ze een lege doorsnede. Stel nu $\mathcal{O}^a \cap \mathcal{O}^B = \emptyset$. Vanwege ☺ 8 zijn $\mathcal{O}^A$ en $\mathcal{O}^B$ convex. De in voetnoot 15 genoemde scheidingsstelling garandeert de existentie van een rechte lijn die $\mathcal{O}^A$ en $\mathcal{O}^B$ scheidt. Er zijn dus reëele getallen p_1, p_2 niet beide gelijk aan nul en een reëel getal r zodanig dat $p_1 x_1 + p_2 x_2 \geq r$ voor alle $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}^A$ en $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq r$ voor alle $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}^B$. We gaan nu uit het ongerijmde laten zien dat hier zelfs de strikte ongelijkheden gelden (hetgeen betekent dat de lijn in kwestie $\mathcal{O}^A$ en $\mathcal{O}^B$ zelfs strikt scheidt, en dus zijn we klaar). Daartoe, stel

[14] Ter herinnering: een hypervlak bevat de oorsprong, maar een affien hypervlak (zijnde een translatie van een hypervlak) hoeft de oorsprong niet te bevatten.

[15] De volgende is geschikt: elk tweetal convexe niet-lege disjuncte delen van $\mathbb{R}^n$ is te scheiden door middel van een affien hypervlak.

bijvoorbeeld $(n_1, n_2) \in \mathcal{O}^A$ voldoet aan $p_1 n_1 + p_2 n_2 = r$. Omdat $\mathcal{O}^A$ een open deel van $\mathbb{R}^2_+$ is, is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $C := B_\epsilon(n_1, n_2) \cap \mathbb{R}^2_+$ geheel in $\mathcal{O}^A$ ligt. Voor $t < 1$ groot genoeg is $t(n_1, n_2)$ een element van C. Er geldt nu voor zo'n t dat $p_1(t_1 n_1) + p_2(t_2 n_2) < r$, hetgeen een tegenspraak is. Vatten we samen: ☺ 4 en ☺ 9 impliceren:

Stelling 6 Stel u^A, u^B zijn continu en quasi-concaaf. Zij $\mathbf{X}$ een realiseerbare allocatie en $\mathbf{m}$ het ermee corresponderende punt in de doos van Edgeworth. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

1. $\mathbf{X}$ is zwak pareto-efficiënt.
2. $\mathcal{C}^A$ en $\mathcal{C}^B$ raken elkaar in $\mathbf{m}$. $\diamond$

Als alles even meezit, dan kan men behulp van de doos van Edgeworth en Stelling 6 in veel concrete gevallen met behulp van een schets de paretoverzameling bepalen, zonder al te veel gereken.[16]

3 De kern

Beschouw weer een zuivere ruileconomie. We hebben hierboven betoogd dat het redelijk is te veronderstellen dat een ruilevenwicht $\mathbf{X}$ een pareto-efficiënte realiseerbare allocatie moet zijn waarin geen enkele consument slechter af is dan in de initiële allocatie $\mathbf{\Omega}$. Kunnen we nog meer redelijke eisen opleggen? Ja, dat kan! Om dat uit te leggen noteren we nu met $\mathcal{N} := \{1, \ldots, N\}$ de verzameling der consumenten en noemen een niet-lege deelverzameling van $\mathcal{N}$ <u>coalitie</u>. Stel nu eens dat $\mathbf{X}$ een realiseerbare allocatie is waarvoor er een coalitie S en goederenbundels $\mathbf{y}^h$ $(h \in S)$ zijn, zodanig dat $\sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h$ en $u^h(\mathbf{y}) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle $h \in S$ met tenminste een dezer ongelijkheden strikt. In dat geval kunnen consumenten uit S een ruilproces starten waarbij slechts zij betrokken zijn met uitkomsten $\mathbf{y}^h$ die voor geen van hen slechter dan $\mathbf{x}^h$ is en voor tenminste een van hen zelfs beter is: $\mathbf{X}$ kan door S verbeterd worden. Ze zouden dus "gek" (lees: niet doelrationeel) zijn om $\mathbf{X}$ als uitkomst te accepteren. Het is redelijk te veronderstellen dat een ruilevenwicht een realiseerbare allocatie is die door geen coalitie verbeterd kan worden. Men definieert de (sterke) kern van de zuivere ruileconomie als de verzameling der realiseerbare allocaties die door geen enkele coalitie verbeterd kunnen worden.

En nu formeel: als $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$ een realiseerbare allocatie is en S een coalitie is, dan zeggen we <u>$\mathbf{X}$ kan door S verbeterd worden</u> als er goederenbundels $\mathbf{y}^h$ $(h \in S)$ zijn zodanig dat

1. $\sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h$;
2. $u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle $h \in S$ met tenminste één ongelijkheid strikt.

In termen van deze notie is de <u>(sterke) kern</u> van een zuivere ruileconomie gedefinieerd als de verzameling der realiseerbare allocaties die door geen enkele coalitie verbeterd kan worden.

We leggen nu dus de volgende eis aan een ruilevenwicht op: het zit in de kern. Deze eis impliceert de andere twee eigenschappen die we al aan een ruilevenwicht oplegden:

☺ **10** Elk element uit de kern is individueel rationeel en pareto-efficiënt.

Inderdaad: stel $\mathbf{X}$ is in de kern. $\mathbf{X}$ kan door $S = \{i\}$ niet verbeterd worden. In het bijzonder geldt voor $\mathbf{y}^i = \boldsymbol{\omega}^i$ niet dat $u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle $h \in S$ met tenminste één ongelijkheid strikt. Dit implcieert $u^i(\mathbf{y}^i) \leq u^i(\boldsymbol{x}^i)$, i.e. $u^i(\boldsymbol{\omega}^i) \leq u^i(\mathbf{x}^i)$. Dus $\mathbf{X}$ is individueel rationaal voor consument i. Omdat dit voor elke i geldt, is $\mathbf{X}$ individueel rational. Ook kan $\mathbf{X}$ niet door $S' = \{1, \ldots, N\}$ verbeterd worden. Dus voor elke realiseerbare $\mathbf{Y}$ geldt niet dat $u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle $h \in S$

[16]Maar men hoede zich om resultaten verkregen met plaatjes al te snel de status van bewijs te geven.

met tenminste één ongelijkheid strikt. Dit zegt dat $\mathbf{Y}$ een pareto verbetering van $\mathbf{X}$ is. Dus $\mathbf{X}$ is pareto-efficient.[17]

In geval $N = 2$ zijn er slechts drie mogelijkheden voor de coalitie S in bovenstaande expliciete definitie van de kern: $S = \{1\},\ S = \{2\}$ en $S = \{1, 2\}$. Dat leidt tot:

☺ **11** Indien $N = 2$, is de sterke kern gelijk aan de verzameling der realiseerbare allocaties die sterk pareto-efficiënt en individueel rationeel zijn.

Het is goed op te merken dat de verzameling der pareto efficiënte allocaties alleen van de hoeveelheden $O_1, \ldots, O_n$ afhangt, maar dat de kern van de hele initiële allocatie afhangt.

In geval $N \geq 3$, kan de kern echt groter zijn dan de verzameling der sterk pareto-efficiënte realiseerbare allocaties. Hier is een voorbeeld:

Voorbeeld 6 Beschouw een zuivere ruileconomie tussen 3 consumenten met 2 goederen waar elke consument dezelfde cd-nutsfunctie x_1x_2 heeft. Verder stel $\boldsymbol{\omega}^1 = (19, 1), \boldsymbol{\omega}^2 = (1, 19), \boldsymbol{\omega}^3 = (10, 10)$. Beschouw de realiseerbare allocatie $\mathbf{X} = ((9, 9), (9, 9), (12, 12))$ Omdat

$$u^1(9, 9) > u^1(19, 1),\ u^2(9, 9) > u^2(1, 19),\ u^3(12, 12) > u^2(10, 10)$$

volgt dat $\mathbf{X}$ is individueel rationeel $\mathbf{X}$ is pareto-efficiënt omdat Stelling 5 toepasbaar is: $\frac{1}{1}\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{1}{1}\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{1}{1}\frac{x_2^3}{x_1^3} = 1$. Nu stel $S = \{1, 2\}$. Voor $\mathbf{y}^1 = (10, 10)$ en $\mathbf{y}^2 = (10, 10)$ geldt

$$\sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h,\ u^1(\mathbf{y}^1) > u^1(\mathbf{x}^1),\ u^2(\mathbf{y}^2) > u^2(\mathbf{x}^2).$$

Dit betekent dat $\mathbf{X}$ niet in de kern zit.

Opgave 20 Gegeven een zuivere ruileconomie is haar <u>zwakke kern</u> gedefinieerd als de verzameling der realiseerbare allocaties $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$ waarvoor er geen coalitie S van $\mathcal{N}$ is met de eigenschappen dat er goederenbundels $\mathbf{y}^h$ $(h \in S)$ bestaan zodanig dat

$$\sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h;$$

$$u^h(\mathbf{y}^h) > u^h(\mathbf{x}^h) \text{ voor alle } h \in S.$$

a. Bewijs dat de sterke kern een deelverzameling is van de zwakke kern.

b. Bewijs dat indien elke nutsfunctie sterk stijgend is, de zwakke kern gelijk is aan de sterke kern.

Opgave 21 Is elke pareto-efficiënte pareto-verbetering van de initiële allocatie een element van de kern?

Opgave 22 Bepaal de kern van de zuivere ruileconomie tussen 2 consumenten met 2 goederen waar $u^A(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$, $u^B(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ en $0_1 = 0_2$ (en concludeer dat de kern onafhankelijk van de initiële allocatie is).

We hebben nu wel de notie van kern in ons bezit. Maar we zouden ook graag een precies resultaat over het al of niet niet-leeg zijn van de kern hebben. Stelling 18 hieronder is er zo eentje. Maar alvorens deze stelling te kunnen bewijzen moeten we eerst heel wat werk verrichten.

[17] Weer kunnen we ons afvragen of dat nu alle redelijke eisen zijn die we aan een ruilevenwicht kunnen stellen. Zijn er misschien nog diepzinnigere? Men heeft er geen kunnen bedenken, voor zover de auteur weet.

Opgave 23 Gegeven een zuivere ruileconomie tussen 2 consumenten met 2 goederen waar $u^A = x_1 x_2$, $u^B = x_1 x_2^2$, $\boldsymbol{\omega}^A = (9,1)$ en $\boldsymbol{\omega}^B = (3,11)$. Verder zijn gegeven de volgende drie realiseerbare allocaties: $\mathbf{X} = \Big((8,6),(4,6)\Big)$, $\mathbf{Y} = \Big((3,4),(9,8)\Big)$, $\mathbf{Z} = \Big((6,4),(6,8)\Big)$. Welke dezer allocaties zijn individueel rationeel, welke pareto-efficiënt en welke zitten in de kern?

Opgave 24 Bepaal vergelijkingen voor de kern van een zuivere ruileconomie tussen 2 consumenten met 2 goederen waar elke consument dezelfde gcd-nutsfunctie $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ heeft. Onderzoek het geval nader waar beide consumenten ook dezelfde initiële goederenbundel hebben.

4 Evenwicht

We gaan het model van de zuivere ruileconomie uitbreiden met prijzen en komen zo tot ons eerste algemene evenwichtsmodel. Wat theorie voor dergelijke modellen is het onderwerp van dit hoofdstuk.[18] In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de existentie van walrassiaanse evenwichten voor zo'n economie. De definitie van walrassiaans evenwicht geven we zonder welke veronderstellingen dan ook te maken over de objecten die in het geding zijn, behalve dan dat prijzen niet gelijk aan 0 kunnen zijn. De eerste existentieresultaten van walrassiaanse evenwichten zijn van Arrow en Debreu Arrow and Debreu (1954), McKenzie McKenzie (1954) en Nikaido Nikaido (1956). Tegenwoordig zijn er heel wat wegen die tot existentieresultaten leiden en lijden. Om dat lijden verder wat te verzachten, zullen we alleen zulke resultaten bekijken waarbij we niet echt een beroep hoeven te doen op theorie voor correspondenties. Om zoveel mogelijk boven water te krijgen wat er nu eigenlijk toe doet bij het existentiebewijs, halen we de notie van abstract algemeen evenwichtssysteem erbij. We zullen zien dat het helemaal geen uitgemaakte zaak is dat walrassiaanse evenwichten bestaan, laat staan dat een walrassiaans evenwicht uniek en stabiel is.[19]

In het volgende deel zullen we het model van de zuivere ruileconomie realistischer maken door ruil-en-productie-economieën te bestuderen. Een nogal onrealistisch aspect van het model van de zuivere ruileconomie is namelijk dat er geen productie plaatsvindt. Patinkin formuleerde dat ooit treffend als dat een zuivere ruileconomie een model met "brood van de hemel" betreft.

4.1 *Setting*: vervolg

De *setting* is hetzelfde als in § 1.1. Nu echter komen ook prijzen op het "toneel". Omdat we prijzen willen verklaren, is het niet zo fraai om al bij voorbaat uit te sluiten dat een prijs gelijk aan 0 is: onder een prijsvector verstaan we een element van $\mathbb{R}^n_+$. We zullen er veelal de vectornotatie $\mathbf{p}$ voor gebruiken. Gegeven een zuivere ruileconomie $(u^1, \ldots, u^N; \boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^N)$, dan verstaat men onder een walrassiaans evenwicht[20] van die zuivere ruileconomie een paar $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ van een prijsvector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$ met $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ en een allocatie $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N) \in (\mathbb{R}^n_+)^N$ zodanig dat:

– voor elke h is $\mathbf{x}^h$ een maximaliseerder van de nutsfunctie $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$;

– $\mathbf{X}$ is realiseerbaar; *i.e.* $\sum_{h=1}^N x_k^h = O_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

In dat geval heet $\mathbf{p}$ nog een evenwichtsprijsvector en $\mathbf{X}$ evenwichtsallocatie.

Voordat we nu welke veronderstellingen dan ook gaan opleggen, merken we op dat de definitie van walrassiaans evenwicht meteen impliceert:

[18] Dekpunttheorie speelt er een grote rol. Allerlei efficiënte technieken zijn in de loop der tijd ontwikkeld om dekpunten te berekenen. In dit verband is de naam van Scarf vermeldenswaard. Scarf (1973) vond namelijk een constructief algoritmisch bewijs van de Dekpuntstelling van Brouwer en legde daarmee de basis voor de ontwikkeling van de zogenaamde simpliciale algoritmes ter berekening van evenwichten. Interessant is het hier op te merken dat er nauwelijks iets fundamenteels in de wiskunde te vinden is dat zijn wortels in de economie heeft, maar dat een uitzondering daarop de genoemde ontdekking van Scarf is. De wiskunde profiteert wel volop van wat de natuurkundigen bedenken.

[19] Vooral chicago-economen houden van modellen met unieke stabiele walrassiaanse evenwichten.

[20] Synoniemen: algemeen evenwicht en marktevenwicht. Vooral de term "algemeen evenwicht" is minder gelukkig omdat men ook voor andere marktvormen algemene evenwichtsbeschouwingen kan houden.

☺ **12** De verzameling der evenwichtsprijsvectoren is een kegel.

Minder formeel: elk positief veelvoud van een evenwichtsprijsvector is weer een evenwichtsprijsvector. Vanwege ☺ 12 spelen slechts relatieve prijzen een rol. Men beperkt zich daarom in toepassingen vaak tot numeraire-prijsvectoren, *i.e.* tot prijsvectoren waarvan de prijs van een zeker goed steeds 1 is, en vooral bij theoretische bespiegelingen tot genormaliseerde prijsvectoren, *i.e.* prijsvectoren $\mathbf{p}$ waarvoor $p_1 + \cdots + p_n = 1$ is.

Een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$ heet individueel rationeel voor h als $u^h(\mathbf{x}^h) \geq u^h(\boldsymbol{\omega}^h)$ en heet individueel rationeel als deze individueel rationeel voor elke consument is. De definitie van walrassiaans evenwicht impliceert:

☺ **13** Elke evenwichtsallocatie is individueel rationeel.

De enige impliciete mathematische veronderstelling verder in deze paragraaf is:

① elke $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ is continu.

4.2 Gemicroscopiseerde reële-wereld-structuur: vervolg

We gaan de reëlewereldstructuur uit § 1.2 nu verrijken met prijzen.

We maken voor het ruilproces nu niet alleen de veronderstelling dat bij het ruilen niets verloren gaat maar ook dat er vaste ruilvoeten zijn omdat de goederen geprijsd zijn. Gegeven prijzen heeft elke initiële goederenbundel een waarde; dit vertegenwoordigt dan een budget. Daarmee worden verdere restricties aan een ruilproces opgelegd: wat een consument h "uit de tonnen haalt" mag de waarde van zijn initiële goederenbundel niet overschrijden. Men kan hier nu op natuurlijke wijze van "kopen" en "verkopen" spreken.

Omdat we willen dat geen enkele consument er invloed op heeft, introduceert men een "auctionaris"[21] die de prijzen kan vaststellen; geen der consumenten treedt als auctionaris op; een andere subject vervult die rol.[22] Als de auctionaris de prijzen van de goederen vaststelt, dan geeft dit elke consument een budget. De veronderstelling van initiële goederenbundels modelleert dus bovendien budgetvorming. Door te gaan ruilen is het heel goed mogelijk dat na de ruil elke consument beter af is dan ervoor.

Een volgende vraag is, welke prijzen de auctionaris nu vaststelt, *i.e.* wat de motivatie van de auctionaris is. Welnu, die is om voor een zogenaamd "walrassiaans evenwicht" te zorgen. Wat datlaatste inhoud lichten we nu toe. Bij gegeven prijzen die hij vaststelt hoort een zekere vraag van de consumenten naar de goederen. Als de auctionaris zo maar wat prijzen vaststelt, dan is het heel waarschijnlijk dat het vraaggedrag der consumenten niet compatibel is met wat mogelijk is, gegeven de beschikbare goederenhoeveelheden. Om dat in te zien veronderstellen we maar eens dat de prijs van goed 1 hoog is. Dan zullen de consumenten dat goed willen verkopen teneinde andere goederen te kopen. Maar ze zullen er, vanwege de hoge prijs, weinig van verkopen. Dus op de markt voor goed 1 is het aanbod groter dan de vraag. Er is sprake van evenwicht als de totale vraag naar elk goed gelijk is aan wat ervan dat goed aanwezig is. In dat geval gaan de wensen van de consumenten in vervulling. Het is goed om even te microscopiseren: pas nadat de auctionaris een (walrassiaans) evenwicht heeft vastgesteld, vindt er een reällocatie plaats doordat elk subject zijn initiële goederenbundel ruilt voor zijn goederenbundel in de evenwichtsallocatie (waardoor hij er niet in nut op achteruit gaat); er wordt dus slechts geruild bij evenwichtsprijzen.[23]

[21] Synoniem: veilingmeester.

[22] Het is hierbij dan wel nog goed als er veel consumenten zijn waarbij niemand invloed op de prijzen heeft; maar in ons model kunnen we ongestraft ook het geval toelaten waar N een klein getal is.

[23] Merk op dat bij de definitie van walrassiaans evenwicht elke consument h niet de functie $u^h : D \to \mathbb{R}$ maar de functie $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ maximaliseert onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$. (Let op: als $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^h)$ een allocatie is waarvoor voor alle h de ongelijkheid $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^h \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$ geldt, dan volgt niet per se dat $\mathbf{X} \leq \boldsymbol{\Omega}$.) De versie met $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq O_k \ (1 \leq k \leq n)\}$ in plaats van $\mathbb{R}^n_+$ zou corresponderen met consumenten die rekening houden met wat er in de economie aanwezig is. Typisch voor een walrassiaans evenwicht echter is dat ze dat niet doen en dat hun wensen toch gerealiseerd kunnen worden.

Het vaststellen van de prijzen door de auctionaris kan eenmalig geschieden of in een meer dynamische context via een zogenaamd tatonnementproces.[24] Op die manier wordt de zogenaamde "onzichtbare hand" van Smith gemodelleerd, *i.e.* "de economische krachten". In feite echter blijven bij dit soort walrassiaanse

[25]

[26] modellen de prijzen toch nog een mysterie en als zodanig is de auctionaris een schimmig figuur. De motivatie van elke consument weer nutsmaximalisatie zijnde, kan wat we over het nutsmaximalisatieprobleem van de consument geleerd hebben, ook hier van pas komen.

Het is nog maar helemaal de vraag of de auctionaris zijn probleem kan oplossen, of anders gezegd, of er berhaupt walrassiaanse evenwichten bestaan. En ook intuïtief is het dat wellicht: iedereen doet maar wat hem goeddunkt en desalniettemin moet de globale vraag naar goederen compatibel zijn met wat ervan beschikbaar is. We zullen zien dat walrassiaanse evenwichten bestaan, als alles even meezit. De economen uit de 19-de eeuw spraken in dit verband van een "onzichtbare hand" die daarvoor zou zorgen. Op die manier gaven ze[27] een wetenschappelijke rechtvaardiging van de *laissez faire: chacun pour soi*[28] doctrine, die zegt dat een overheid niet in markten moet ingrijpen (mede omdat een economie aan zichzelf overgelaten efficiënt zal zijn).

In § 3 hebben we gezien dat het redelijk is te veronderstellen dat een ruilevenwicht in de sterke kern zit en dus in het bijzonder individueel rationeel en pareto-efficiënt is. Een voor de hand liggende vraag is nu of een walrassiaans evenwicht in de sterke kern zit.

4.3 Eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie

Zonder dat we noemenswaardige theorie ontwikkeld hebben, kunnen we nu al de eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie formuleren en bewijzen.

Stelling 7 (Eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie.) Beschouw een zuivere ruileconomie waar elke nutsfunctie continu en lokaal niet-verzadigd is. Dan is elke evenwichtsallocatie pareto-efficiënt. $\diamond$

---

[24] Een enigszins verantwoorde behandeling van het tatonnementproces valt buiten het bestek van dit boek. We komen er nog kort op terug in § 4.7.

[25] Léon Walras (1834-1910), Fransman en econoom. Had moeite om als jongeman zijn draai in de wetenschap te vinden. Het lukte hem bijvoorbeeld niet om aan de École Polytechnique toegelaten te worden. Mede op aanraden van zijn vader kwam hij in de economie terecht. Was de eerste die vraag expliciet afleidde uit nut en die daarmee ook vraag als een functie van alle prijzen beschouwde. Hij analyseerde ook als eerste een algemeen evenwichtsmodel (in een poging ome een probleem van Cournot op te lossen) en is daarmee de eigenlijke grondlegger van de algemene evenwichtstheorie. Zijn tweedelig meesterwerk "Eléments d'Économie Politique Pure" (Walras, (1926) werd echter, niet in de laatste plaats vanwege het mathematische karakter, slecht ontvangen. Pas nadat zijn werk in 1954 in het Engels vertaald was, werd hij alsnog in grotere kring gewaardeerd. Hij pakte het probleem van de existentie van een walrassiaans evenwicht aan door het aantal vergelijkingen en onbekenden te tellen. Schumpeter zei eens dat Walras in zijn opinie de grootste onder de economen is en dat zijn werk het enige is dat vergeleken kan worden met de prestaties van de theoretische fysica. Het lezen van klassieken als Walras ((1926) kan een waar intellectueel genot zijn; dat tegenwoordig een en ander op een betere theoretische leest geschoeid is, doet daar weinig aan af.

[26] John von Neumann (1903-1957), Hongaar, wiskundige, fysicus, informaticus, ..., beter gezegd universeel genie. Leverde prachtige en beslissende bijdragen. Hij was een van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw. Ontwikkelde onder andere het hilbertruimteformalisme van de quantummechanica. Voor ons hier is vooral interessant dat hij een boek von Neumann and Morgenstern (1953) over speltheorie met Oskar Morgenstern schreef. Morgenstern vond het "Ein Geschenk des Himmels" dat von Neumann hem voorstelde tezamen een artikel over speltheorie te schrijven. Dat artikel groeide en groeide en werd zo uiteindelijk het genoemde boek. Volgens von Neumann was dat met uitzondering van de boeken van Wald en Menger het enige boek over mathematische economie dat wiskundig gezien niet al geschreven had kunnen worden ten tijde van Newton. Von Neumann had een beslissende rol in de bouw van de eerste moderne computers. In Los Alamos bedacht hij het implosiemechanisme van plutoniumbommen dat vermoedelijk ook vandaag nog achter alle atoomwapens zit. Leverde ook belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de waterstofbom. Vermoedelijk was hij de meest invloedrijke adviseur op militair gebied die achtereenvolgens presidenten Roosevelt, Truman en Eisenhower hadden. Hij was in hoge mate verantwoordelijk voor het concept van de wederzijdse nucleaire afschrikking, waarop veertig jaar lang de wereldpolitiek gebaseerd is geweest. Hij was een van de eersten die de gevaren van roken inzag. Op 53-jarige leeftijd overleed hij aan botkanker, vermoedelijk opgedaan door het veelvuldig bijwonen van nucleaire tests. Hij trouwde twee keer; aan het huishouden leverde hij geen enkele bijdrage. Zijn eerste echtgenote pleegde zelfmoord.

[27] voor wat die waard is

[28] Een term toegeschreven aan de Franse econoom Jacques Gournay (1712-1759).

Bewijs.— Uit het ongerijmde. Stel $\mathbf{X}$ is een evenwichtsallocatie die pareto-inefficiënt is. Zij $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ een prijsvector zodanig dat $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht is. Omdat $\mathbf{X}$ pareto-inefficiënt is, bestaat er een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y}$ en een consument, zeg j, zodanig dat

$$u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h) \text{ voor alle } h \text{ en } u^j(\mathbf{y}^j) > u^j(\mathbf{x}^j).$$

Omdat $\mathbf{x}^j$ een maximaliseerder is van u^j onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^j$ en $\mathbf{y}^j$ dat vanwege bovenstaande niet is, moet

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^j > \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^j.$$

Verder moet

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^h \geq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h \text{ voor alle } h.$$

Inderdaad: want als dat niet zo zou zijn, dan is er een k met $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^k < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$. Vanwege de lokaal niet-verzadigdheid van u^k in $\mathbf{y}^k$ is er dan een goederenbundel $\mathbf{a}$ met $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$ en $u^k(\mathbf{a}) > u^k(\mathbf{y}^k)$. Echter dan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$ en $u^k(\mathbf{a}) > u^k(\mathbf{x}^k)$ hetgeen in tegenspraak is met het een maximaliseerder zijn van $\mathbf{x}^k$ van de nutsfunctie u^k onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$. Optellen van de N ongelijkheden $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^h \geq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$, met strikte ongelijkheid voor $h = j$, levert

$$\mathbf{p} \cdot \sum_{h=1}^{N} \mathbf{y}^h > \mathbf{p} \cdot \sum_{h=1}^{N} \boldsymbol{\omega}^h,$$

hetgeen in tegenspraak is met het realiseerbaar zijn van $\mathbf{Y}$. Q.E.D.

Stelling 8 (Eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie.) Beschouw een zuivere ruileconomie waar elke nutsfunctie continu en lokaal niet-verzadigd is. Dan is elke evenwichtsallocatie pareto-efficiënt. $\diamond$

Bewijs.— Uit het ongerijmde. Stel $\mathbf{X}$ is een evenwichtsallocatie die pareto-inefficiënt is. Zij $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ een prijsvector zodanig dat $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht is. Omdat $\mathbf{X}$ pareto-inefficiënt is, bestaat er een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y}$ en een consument, zeg j, zodanig dat

$$u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h) \text{ voor alle } h \text{ en } u^j(\mathbf{y}^j) > u^j(\mathbf{x}^j).$$

Omdat $\mathbf{x}^j$ een maximaliseerder is van u^j onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^j$, moet

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^j > \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^j.$$

Verder moet

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^h \geq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h \text{ voor alle } h.$$

Inderdaad: want als dat niet zo zou zijn, dan is er een k met $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^k < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$. Vanwege de lokaal niet-verzadigdheid van u^k in $\mathbf{y}^k$ is dan er een goederenbundel $\mathbf{a}$ met $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$ en $u^k(\mathbf{a}) > u^k(\mathbf{y}^k)$. Echter dan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} < \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$ en $u^k(\mathbf{a}) > u^k(\mathbf{x}^k)$ hetgeen in tegenspraak is met het een maximaliseerder zijn van $\mathbf{x}^k$ van de nutsfunctie u^k onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^k$. Optellen van de N ongelijkheden $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^h \geq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$, met strikte ongelijkheid voor $h = j$, levert $\mathbf{p} \cdot \sum_{h=1}^{N} \mathbf{y}^h > \mathbf{p} \cdot \sum_{h=1}^{N} \boldsymbol{\omega}^h$, hetgeen in tegenspraak is met het realiseerbaar zijn van de allocatie $\mathbf{Y}$. Q.E.D.

Het bewijs van de eerste Hoofdstelling is dus verbluffend eenvoudig en voor de geldigheid ervan zijn concaviteitseigenschappen van de nutsfuncties niet nodig.[29]

Opgave 25 Blijft Stelling 8 geldig als we de veronderstelling van continuï£¡eit van de nutsfuncties laten vallen?

[29] Maar zonder concaviteitseigenschappen van de nutsfuncties is het wel goed mogelijk dat er geen walrassiaans evenwicht bestaat. (Zie Stelling 14).

Er valt iets voor te zeggen om bewijzen uit het ongerijmde te vermijden. In dit verband is hier nog een direct bewijs van de eerste Hoofdstelling dat van toepassing is als alles even meezit. Stel $\mathbf{X}$ is een evenwichtsallocatie. Zij $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ een prijsvector zodanig dat $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht is. Voor elke consument h is dan $\mathbf{x}^h$ de nutsmaximaliserende goederenbundel bij prijsvector $\mathbf{p}$ en budget $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$. Als alles even meezit, dan geldt volgens de Tweede wet van Gossen dat in die bundel $\mathrm{MSV}^h_{ij} = p_i/p_j$. Alle marginale subsitutieverhoudingen zijn dus gelijk. Als alles even meezit impliceert dit de pareto-efficiëntie van $\mathbf{X}$.

We weten al dat elk element uit de sterke kern van een zuivere ruileconomie pareto-efficiënt is. Men kan zich nu afvragen of onder de veronderstellingen van Stelling 8 ook elk walrassiaans evenwicht zelfs in de kern zit. De volgende stelling, waarvan het bewijs een geschikte aanpassing van Stelling 8 behelst, geeft een bevestigend antwoord en is een van de meest belangwekkende resultaten uit de micro-economie.

Hier is een verbetering van de Eerste Hoofdstelling van de Welvaartstheorie.

Stelling 9 Beschouw een zuivere ruileconomie met elke nutsfunctie continu en lokaal niet-verzadigd. Dan bevindt elke evenwichtsallocatie zich in de sterke kern. $\diamond$

Bewijs.— Uit het ongerijmde. Stel $\mathbf{X}$ is een evenwichtsallocatie die niet in de kern zit. Zij $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ een prijsvector zodanig dat $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht is. Omdat $\mathbf{X}$ niet in de kern zit is er een coalitie S en een consument, zeg j, en zijn er goederenbundels $\mathbf{y}^h$ $(h \in S)$ zodanig dat

$$\sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h, \; u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h) \; (h \in S) \text{ en } u^j(\mathbf{y}^j) > u^j(\mathbf{x}^j).$$

Er geldt in het bijzonder dat

$$\mathbf{p} \sum_{h \in S} \mathbf{y}^h = \mathbf{p} \cdot \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h.$$

Voor elke $i \in S$ geldt vanwege de lokale niet-verzadigdheid van u^i en $u^i(\mathbf{y}^i) \geq u^i(\mathbf{x}^i)$ dat

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^i \geq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^i.$$

En vanwege de lokale niet-verzadigdheid van u^j en $u^j(\mathbf{y}^i) > u^j(\mathbf{x}^j)$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^j > \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^j.$$

Daaruit halen we

$$\mathbf{p} \cdot \sum_{h \in S} \mathbf{y}^h > \mathbf{p} \cdot \sum_{h \in S} \boldsymbol{\omega}^h,$$

hetgeen een tegenspraak is. Q.E.D.

Het vermoeden van Edgeworth behelst de volgende uitspraak: de kern krimpt in tot de verzameling der evenwichtsallocaties als we het aantal economische agenten naar oneindig laten gaan. Voor meer hierover zie bijvoorbeeld het boek Jehle and Reny (2001).

Opgave 26 Verlorenvantheemaat is niet zo onder de indruk van de reëelewereldrelevantie van de eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie. Hij zegt: “Je kunt in een evenwichtsallocatie pareto-efficiënt creperen van de honger”. En daarmee heeft hij gelijk, want de bijvoorbeeld extreme situatie waarin één subject alle goederen bezit en de andere niets, is pareto-efficiënt. Hij was het die zelf een andere definitie van efficiënte bedacht, die de auteur om hem te eren “Verlorenvantheemaat-efficiëntie” zal noemen: een toestand X heet “Verlorenvantheemaat-efficiënt” als er geen subject J en geen een andere toestand Y zijn zodanig dat J X liever dan Y heeft en elk subject ongelijk J Y liever dan X heeft.[30]

[30] Een toestand is dus Verlorenvantheemaat-inefficiënt als er een subject J is dat door zich zelf op te offeren elk ander subject erop vooruit kan laten gaan. Bijbelkenners zal zo'n subject J niet vreemd zijn.

Laat zien dat elke realiseerbare allocatie en in het bijzonder elk walrassiaans evenwicht van een zuivere ruileconomie met sterk stijgende nutsfuncties Verlorenvantheemaat-inefficiënt is.

4.4 Prijzen gelijk aan nul

Let op: in deze deelparagraaf kunnen, bij wijze van uitzondering, prijzen gelijk aan 0 zijn en hoeft de nutsfunctie u niet continu te zijn.

De stelling die we in deze deelparagraaf bewijzen is nogal technisch van aard, maar zal ons later goed van pas komen. Zij u een nutsfunctie, die bij wijze van uitzondering niet continu hoeft te zijn. Dus u is niets anders dan een functie op $\mathbb{R}^n_+$. Verder definiï£¡en we voor $\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}\}.$$

Voor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$ is duidelijk dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

– $\mathbf{a}$ is een maximaliseerder van $u{\upharpoonright}_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})}$, *i.e.* van de restrictie van u tot $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$.

– $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}$ en voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ geldt $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{a}) \;\Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} > \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Dat prijzen gelijk aan nul de existentie van maximaliseerders verpesten, blijkt uit:

☺ **14** Als u sterk stijgend is en er een prijs gelijk aan nul is, dan heeft geen functie $u{\upharpoonright}_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})}$ een maximaliseerder.

Inderdaad, stel $p_k = 0$. Merk nu op dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ ook

$$\mathbf{y} := (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_k + 1, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$$

en dat vanwege $\mathbf{y} > \mathbf{x}$ er geldt $u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$.

Opgave 27 Bewijs de volgende variant van ☺ 14.
Als $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ sterk stijgend is en het nut in elke inwendige goederenbundel groter is dan dat van elke niet-inwendige goederenbundel, dan geldt voor elke $\mathbf{p} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ en $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$ met $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$ dat de functie $u{\upharpoonright}_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})}$ geen maximaliseerder heeft.

Fixeer $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$. Indien, voor elke $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ de functie $u{\upharpoonright}_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})}$ een unieke maximaliseerder heeft, dan duiden we deze aan met $\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ en hebben zo een afbeelding

$$\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+.$$

We noemen deze een walrassiaanse vraagafbeelding.
Als $\underline{\mathbf{x}}$ wel-gedefinieerd is, dan geldt

☺ **15** $\underline{\mathbf{x}}$ is homogeen van graad 0.

☺ **16** Als u sterk stijgend is, dan geldt voor alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ dat $\mathbf{p} \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Opgave 28 Bewijs ☺ 15 en ☺ 16.

Stelling 10 Fixeer $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$. Stel dat de walrassiaanse vraagafbeelding $\underline{\mathbf{x}}$ wel-gedefinieerd is. Zij $(\mathbf{p}^m)$ een convergente rij van prijsvectoren in $\mathbb{R}^n_{++}$ met limiet $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_+$. Dan:

1. Voor elke i met $p^\star_i > 0$ is de rij $(\underline{x}_i(\mathbf{p}^m))$ begrensd.

Veronderstellen we nu tevens dat u continu en sterk stijgend is en dat $\mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$. Dan:

2. Indien tevens de rij $\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m)$ convergent is, naar $\mathbf{x}^\star$ zeg, dan is $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\mathbf{x}^\star \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x}^\star = \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^\star)$.

3. Indien $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^n_{++}$, dan geldt $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i(\mathbf{p}^m) = \infty$. $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij $\mathbf{q} \gg \mathbf{0}$ zodanig dat $\mathbf{p}^m \leq \mathbf{q}$ voor alle m. Omdat $p_i^m > 0$ en $\lim_{m\to\infty} p_i^m = p_i^\star > 0$, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $p_i^m > \delta$ voor alle m. Nu

$$p_i^m \underline{x}_i(\mathbf{p}^m) \leq \sum_{l=1}^n p_l^m \underline{x}_l(\mathbf{p}^m) = \mathbf{p}^m \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m) \leq \mathbf{p}^m \cdot \boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Daaruit voor elke m: $\underline{x}_i(\mathbf{p}^m) \leq \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega}}{p_i^m} \leq \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega}}{\delta}$, zoals gewenst.

2. Omdat het inwendig product $\cdot$ continu is, volgt $\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}^m \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m) = \mathbf{p}^\star \cdot \mathbf{x}^\star$ en $\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}^m \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega}$. Omdat, vanwege ☺ 16, $\mathbf{p}^m \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m) = \mathbf{p}^m \cdot \boldsymbol{\omega}$ volgt nu

$$\mathbf{p}^\star \cdot \mathbf{x}^\star = \mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega},$$

en dus $\mathbf{x}^\star \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}^\star)$. We bewijzen nu dat

$$u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}^\star) \;\; (\mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}^\star)).$$

Welnu, laat $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}^\star)$. Dan $\mathbf{p}^\star \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega}$. Omdat $\mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$, volgt voor alle $\lambda \in (0,1)$ dat

$$\mathbf{p}^\star \cdot \lambda \mathbf{x}^\star < \mathbf{p}^\star \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Voor m groot genoeg geldt

$$\mathbf{p}^m \cdot \lambda \mathbf{x}^\star < \mathbf{p}^m \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{p}^m \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m).$$

Dat impliceert voor zulke m

$$u(\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^m)) \geq u(\lambda \mathbf{y}).$$

Omdat u continu is, volgt

$$u(\mathbf{x}^\star) \geq u(\lambda \mathbf{y}).$$

Omdat deze ongelijkheid voor alle $\lambda \in (0,1)$ geldt en u continu is, volgt

$$u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}),$$

zoals gewenst. Omdat u sterk stijgend is, garandeert ☺ 14 dat $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$. Dit impliceert tenslotte dat $\mathbf{x}^\star = \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^\star)$.

3. We bewijzen uit het ongerijmde dat $(\mathbf{x}(\mathbf{p}^m))$ geen begrensde deelrij heeft. Dan zijn we klaar.[31] Stel dus dat er wel een begrensde deelrij zou zijn. Volgens de Stelling van Bolzano-Weierstrass heeft deze deelrij een convergente deelrij. Deze laatste deelrij weer met $(\mathbf{x}(\mathbf{p}^m))$ aanduidend en haar limiet met $\mathbf{x}^\star$, geldt dus $\lim_{m\to\infty} \underline{x}(\mathbf{p}^m) = \mathbf{x}^\star$. Nu 2 gebruikend, volgt dat $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, een tegenspraak. Q.E.D.

Opgave 29 De cd-nutsfunctie is niet sterk stijgend. Geef een variant van Stelling 10 die ook voor een cd-functie geldig is. Aanwijzing: gebruik het resultaat uit Opgave 27.

4.5 Geaggregeerde overvraag

In deze hele deelparagraaf veronderstellen we dat elke consument wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties heeft.

[31] Immers, als $(\mathbf{a}^m)$ een rij in $\mathbb{R}^n$ is die geen begrensde deelrij heeft, dan geldt $\lim_{m\to\infty} \parallel \mathbf{a}^m \parallel = \infty$.

Beschouw een zuivere ruileconomie. De veronderstelling van een wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfunctie voor elke consument maakt een en ander veel simpeler. (Zonder deze veronderstelling zouden we moeten werken met correspondenties.)

Omdat de marshalliaanse vraagfuncties wel-gedefinieerd zijn, is nu ook voor elke consument h de walrassiaanse vraagafbeelding

$$\underline{\mathbf{x}}^h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$$

wel-gedefinieerd. Met $\tilde{x}^h_i : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de marshalliaanse vraagfunctie naar goed i van consument h aanduidend, hebben we

$$\underline{\mathbf{x}}^h(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{x}}^h(\mathbf{p}; \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h).$$

Er geldt dus dat $\underline{x}^h(\mathbf{p})$ de unieke maximaliseerder van de functie $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$ is. In het bijzonder hebben we

$$\mathbf{p} \cdot \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h.$$

Eenmaal de $\underline{x}^h$ hebbend, definiëren we voor elke consument h de functie $\mathbf{e}^h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ door

$$\mathbf{e}^h := \underline{x}^h - \boldsymbol{\omega}^h$$

en daaruit $\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ door

$$\mathbf{z} := \sum_{h=1}^{N} \mathbf{e}^h.$$

Zoals gebruikelijk, duiden we de componentfuncties $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ van deze objecten aan met $\underline{x}^h_j, e^h_j$ en z_k. We noemen nog

$\underline{x}^h_j$ walrassiaanse vraagfunctie naar j van h;

e^h_j overvraagfunctie naar j van h;

z_k geaggregeerde overvraagfunctie naar k;

$\mathbf{z}$ geaggregeerde overvraagafbeelding.

Merk op dat z_i (gecompliceerde) functies van $\mathbf{p}$ zijn. Ze zijn bekend zo gauw de marshalliaanse vraagfuncties bekend zijn.

Indien voor zekere $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ en goed k er geldt dat $z_k(\mathbf{p}) = 0$, dan zegt men dat markt k ruimt bij prijzen $\mathbf{p}$.

Stelling 11 Beschouw een zuivere ruileconomie. Veronderstel dat elke $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ continu is en wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties heeft. Dan geldt voor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$:

$$\mathbf{p} \text{ is een evenwichtsprijsvector } \Leftrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

En als $\mathbf{p}$ een evenwichtsprijsvector is, dan is $\mathbf{X} := (\underline{x}^1(\mathbf{p}), \ldots, \underline{x}^N(\mathbf{p}))$ een evenwichtsallocatie. $\diamond$

Bewijs.— "$\Rightarrow$": $\mathbf{p}$ is een evenwichtsprijsvector betekent dat er een allocatie $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$ met $\sum_{h=1}^N x^h_k = O_k$ $(1 \leq k \leq n)$ is zodanig dat, voor elke h, $\mathbf{x}^h$ een maximaliseerder van de nutsfunctie u^h onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^h$ is. Omdat de marshalliaanse vraagfuncties wel-gedefinieerd zijn, zijn de $\mathbf{x}^h$ uniek en zelfs $\mathbf{x}^h = \underline{\mathbf{x}}^h(\mathbf{p})$. Daaruit, voor elke k, $z_k(\mathbf{p}) = \sum_{h=1}^N (\underline{x}^h_k(\mathbf{p}) - \omega^h_k) = \sum_{h=1}^N x^h_k - O_k = 0$. Dus $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Tevens is $\mathbf{X}$, dus $(\underline{\mathbf{x}}^1(\mathbf{p}), \ldots, \underline{\mathbf{x}}^N(\mathbf{p}))$ een evenwichtsallocatie, hetgeen de tweede bewering bewijst.

"$\Leftarrow$": $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ betekent dat voor alle k, $\sum_{h=1}^N (\underline{x}^h_k(\mathbf{p}) - \omega^h_k) = 0$, *i.e.* $\sum_{h=1}^N \underline{x}^h_k(\mathbf{p}) = O_k$. Met $\mathbf{X} := (\underline{\mathbf{x}}^1(\mathbf{p}), \ldots, \underline{\mathbf{x}}^N(\mathbf{p})) \; =: \; (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$ geldt nu dat $\sum_{h=1}^N x^h_k = O_k$ $(1 \leq k \leq n)$ en verder dat, voor elke h, $\underline{\mathbf{x}}^h$ een maximaliseerder van de nutsfunctie $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ onder de restrictie $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \le \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^h$ is. Dus $\mathbf{p}$ is een evenwichtsprijsvector. Q.E.D.

Omdat $z_k = \sum_{h=1}^N (\tilde{x}^h(\mathbf{p};\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^h) - \omega_k^h)$, elke marshalliaanse vraagfunctie homogeen van graad 0 is en een som van functies die homogeen van graad 0 is weer homogeen van graad 0 is, volgt:

☺ **17** De geaggregeerde overvraagafbeelding is homogeen van graad 0.[32]

Men zegt dat de geaggregeerde overvraagafbeelding $\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$

– aan de <u>wet van Walras</u> voldoet als $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++})$;

– <u>regulier</u> is, als voor elke convergente rij $(\mathbf{p}^m)$ van prijsvectoren in $\mathbb{R}^n_{++}$ met limiet $\mathbf{p}^\star \neq \mathbf{0}$ waarvoor $p_k^\star = 0$ voor een k is, er een l met $p_l^\star = 0$ is met de eigenschap dat de rij $(z_l(\mathbf{p}^m))$ naar boven onbegrensd is.

Regulariteit is een technische conditie die we straks zullen gebruiken om de existentie van walrassiaanse evenwichten te garanderen. Hier is een reëlewereldbewoording van de wet van Walras:

☺ **18** De ruilwaarde van de totale geaggregeerde overvraag is 0, ongeacht de prijzen.

In Stelling 12(2) zullen we zien dat aan de wet van Walras voldaan is zo gauw elke nutsfunctie lokaal niet-verzadigd is. Men kan de wet van Walras zien als wat fysici een "behoudswet" zouden noemen. Maar in feite gaat het hier over niet veel meer dan een boekhoudkundige trivialiteit: de wet berust (in het genoemde geval) slechts op de definitie van de geaggregeerde overvraagafbeelding tezamen met het feit dat een nutsmaximaliserende goederenbundel in het budgethypervlak ligt. Een interessant gevolg van de wet van Walras is:[33]

☺ **19** Als $n-1$ markten bij ruimen, dan ruimt de overige markt ook.

Inderdaad als $z_k(\mathbf{p}) = 0$ voor $n-1$ goederen, dan is vanwege $\sum_{k=1}^n p_k z_k(\mathbf{p}) = 0$ en de positiviteit der prijzen ook voor het overige goed de geaggregeerde overvraag gelijk aan 0.

Stelling 12 Beschouw een zuivere ruileconomie. Veronderstel verder dat elke $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ continu en lokaal niet-verzadigd is en wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties heeft. Beschouw de geaggregeerde overvraagafbeelding $\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$. Dan:

1. Als elke nutsfunctie tevens strikt quasi-concaaf is, dan is $\mathbf{z}$ continu.
2. $\mathbf{z}$ voldoet aan de wet van Walras.
3. Als elke nutsfunctie tevens sterk stijgend is, dan is $\mathbf{z}$ regulier. ◇

Bewijs.— 1. Omdat onder deze voorwaarden elke $\tilde{x}^h$ continu is.

2. We hebben voor elke consument h dat de nutsmaximaliserende goederenbundel $\mathbf{x}^h$ in zijn budgethypervlak ligt dus dat $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^h = \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^h$. Oftewel $\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}^h - \boldsymbol{\omega}^h) = 0$, wat de auteur

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^h = 0 \text{ (partële wet van Walras)}$$

noemt. Sommeren over h geeft $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z} = 0$.

3. Zij $(\mathbf{p}^m)$ een convergente rij van prijsvectoren in $\mathbb{R}^n_{++}$ met $\lim_{m\to\infty}\mathbf{p}^m = \mathbf{p}^\star \neq \mathbf{0}$ en $p_k^\star = 0$. Dan $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^n_{++}$. Omdat $(O_1,\ldots,O_n) \gg \mathbf{0}$, is $0 < \mathbf{p}^\star \cdot \sum_{h=1}^N \boldsymbol{\omega}^h = \sum_{h=1}^N \mathbf{p}^\star\cdot\boldsymbol{\omega}^h$. Daarom is er een consument a zodanig dat $\mathbf{p}^\star\cdot\boldsymbol{\omega}^a > 0$. Zet $\mathbf{y}^m := \underline{x}^a(\mathbf{p}^m)$. Volgens Stelling 10 geldt dat de rij $(\mathbf{y}^m)$ onbegrensd is. Omdat de rij $(\mathbf{y}^m)$ een onbegrensde rij in $\mathbb{R}^n_+$ is, moet er een goed l zijn zodanig dat de rij (y_l^m) naar boven onbegrensd is. De rij $(\mathbf{p}^m\cdot\boldsymbol{\omega}^a)$ is begrensd omdat ze

[32] *I.e.* $\mathbf{z}(t\mathbf{p}) = \mathbf{z}(\mathbf{p})$ voor alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ en $t > 0$.
[33] Verscheidene auteurs noemen ook wel dit gevolg "de wet van Walras".

convergent is. Omdat $p_l^m y_l^m \leq \mathbf{p}^m \cdot \boldsymbol{\omega}^a$ is ook de rij $(p_l^m y_l^m)$ begrensd. Dat kan alleen maar als $p_l^\star = \lim_{m\to\infty} p_l^m = 0$. We hebben dus dat de rij (y_l^m) naar boven onbegrensd is en dat $p_l^\star = 0$. Opmerkend dat $z_l(\mathbf{p}^m) = \sum_{h=1}^N (\underline{x}_l^h(\mathbf{p}^m) - \omega_l^h) \geq -O_l + \underline{x}_l^a(\mathbf{p}^m) = -O_l + y_l^m$ is ook de rij $(z_l(\mathbf{p}^m))$ naar boven onbegrensd, zoals gewenst. Q.E.D.

De veronderstelling van wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties maakt dat Stelling 12 niet toepasbaar is op situaties waar bijvoorbeeld een der nutsfuncties een solow-nutsfunctie is. En verder:

Opgave 30 a. Stelling 12(3) is niet toepasbaar indien een van de nutsfuncties een cd-functie is. Bewijs dat desalniettemin de geaggregeerde overvraagafbeelding behorend bij een zuivere ruileconomie met $n \geq 2$ in geval van louter cd-nutsfuncties regulier is.

b. Bewijs dat de geaggregeerde overvraagafbeelding behorend bij een zuivere ruileconomie met louter leontief-nutsfuncties niet regulier is.

Voorbeeld 7 Gegeven de genormaliseerde cd-nutsfuncties $u^A(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ en $u^B(x_1, x_2) = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$ en een initiële allocatie $((\omega_1^A, \omega_2^A), (\omega_1^B, \omega_2^B))$, zijn de overvraagfuncties

$$e_i^A = \alpha_i \frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_i} - \omega_i^A, \;\; e_i^B = \beta_i \frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_i} - \omega_i^B.$$

Daaruit volgt voor de geaggregeerde overvraagfuncties

$$z_i = \alpha_i \frac{p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A}{p_i} + \beta_i \frac{p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B}{p_i} - (\omega_1^A + \omega_1^B).$$

Volgens Stelling 11 en ☺ 19 is een prijsvector $\mathbf{p}$ een evenwichtsprijsvector d.e.s.d.a. $z_1(\mathbf{p}) = 0$. $z_1 = 0$ zettende leidt tot een semi-unieke evenwichtsprijsvector (p_1, p_2) gegeven door

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha_2\omega_1^A + \beta_2\omega_1^B}{\alpha_1\omega_2^A + \beta_1\omega_2^B}.$$

Met $\{i, j\} = \{1, 2\}$ volgt hieruit weer met behulp van Stelling 11 dat er een unieke evenwichtsallocatie $\mathbf{X}$ is, gegeven door

$$X_i^A = \alpha_i(\omega_i^A + \frac{\alpha_j\omega_i^A + \beta_j\omega_i^B}{\alpha_i\omega_j^A + \beta_i\omega_j^B}\omega_j^A); \;\; X_i^B = \beta_i(\omega_i^B + \frac{\beta_j\omega_i^B + \alpha_j\omega_i^A}{\beta_i\omega_j^B + \alpha_i\omega_j^A}\omega_j^B). \;\; \diamond$$

Opgave 31 Stel de nutsfuncties zijn $u^A(x_1, x_2) = x_1 x_2^{1/2}$ en $u^B(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2x_2$, de initiële goederenbundels voor A is $(100, 200)$ en die voor B is $(200, 100)$. Stel de prijzen zijn $p_1 = 1/4$ en $p_2 = 3/2$. Bereken alle overvragen en geaggregeerde overvragen. Controleer de wet van Walras. Laat zien dat de gegeven prijzen geen evenwichtsprijzen zijn. Bepaal een evenwichtsprijsvector.

Opgave 32 Bepaal de evenwichtsprijzen voor de zuivere ruileconomie met 3 consumenten en 3 goederen in geval

$$u^1(x_1, x_2, x_3) = x_1^{1/2} x_2^{1/6} x_3^{1/3}, u^2(x_1, x_2, x_3) = x_1^{1/3} x_2^{1/3} x_3^{1/3}, u^3(x_1, x_2, x_3) = x_1^{1/4} x_2^{1/2} x_3^{1/4},$$

$$(\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1) = (100, 200, 300), \; (\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) = (200, 100, 300), \; (\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3) = (50, 50, 250).$$

Opgave 33 Gegeven een zuivere ruileconomie bestaande uit twee consumenten en twee goederen. Bepaal de evenwichtsprijsvectoren voor de volgende gevallen.

a. $u^A(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ met $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $u^B(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ en respectievelijk initiële goederenbundels $(0, 1)$ en $(1, 0)$.

b. $u^A(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_1 + 5x_2$, $u^B(x_1, x_2) = x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2$ en respectievelijk initiële goederenbundels $(78, 0)$ en $(0, 164)$.

c. $u^A(x_1, x_2) = x_1x_2$ en $u^B(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ en initiële allocatie $((5, 0), (0, 6))$.

Opgave 34 In deze opgave beschouwen we zuivere ruileconomieën met strikt quasi-concave en sterk stijgende nutsfuncties.

a. Laat zien dat er voor het 3-goederengeval geen zuivere ruileconomie bestaat waarvoor $z_1(p_1, p_2, p_3) = -p_1/p_2 + p_2/p_3 + p_3/p_1$, $z_2(p_1, p_2, p_3) = p_1/p_2 - 37$, $z_3(p_1, p_2, p_3) = p_2/p_3$ de geaggregeerde overvraagfuncties zijn.

b. Zelfde vraag als a, maar dan met $z_1(p_1, p_2, p_3) = -p_1^2 + p_3$, $z_2(p_1, p_2, p_3) = p_2 + \frac{p_1^3}{p_2}$, $z_3(p_1, p_2, p_3) = -\frac{p_2^2}{p_3} - p_1$ als geaggregeerde overvraagfuncties.

Opgave 35 Bereken de evenwichtsprijzen voor de volgende zuivere ruileconomieën.

a. $N = 3$, $n = 2$, de initiële allocatie is $((1, 2), (3, 4), (1, 1))$ en de nutsfuncties zijn

$$u^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2},\ u^2(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2),\ u^3(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}.$$

b. $N = n = 3$, $\omega_i^i = 1$ $(1 \le i \le 3)$, $\omega_j^i = 0$ $(i \ne j)$ en

$$u^1(x_1, x_2, x_3) = \min(x_1, x_2),\ u^2(x_1, x_2, x_3) = \min(x_2, x_3),\ u^3(x_1, x_2, x_3) = \min(x_3, x_1).$$

Opgave 36 Beschouw een zuivere ruileconomie met $\omega_1^A = 4$, $\omega_2^A = 4$, $\omega_1^B = 2$, $\omega_2^B = 2$. Welke conclusie over de monotoniciteitseigenschappen van de nutsfuncties kunt U trekken in geval de realiseerbare allocatie $((3, 2), (3, 4))$ een evenwichtsallocatie is?

Opgave 37 a. Beschouw een zuivere ruileconomie met twee consumenten en twee goederen. Stel $u^h(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ $(h = A, B)$. Laat zien door middel van oplossen van $z_1 = 0$ dat (p_1, p_2) een evenwichtsprijsvector is d.e.s.d.a.

$$(\frac{p_1}{p_2})^2 = \frac{O_2}{O_1}.$$

b. Bepaal de evenwichtsallocatie.

c. Bewijs het resultaat in a ook zonder bepaling van de geaggregeerde overvraag door slim gebuik te maken van het feit dat de nusfuncties gelijk zijn (cfr. Opgave 17).

Opgave 38 Beschouw de zuivere ruileconomie met $\omega^A = 1$, $\omega_2^A = 0, \omega_1^B = 0, \omega_2^B = 1$ en $u^h(x_1, x_2) = (x_1^{\rho^h} + x_2^{\rho^h})^{1/\rho^h}$ $(h = A, B)$ waar $0 < \rho^h < 1$ $(h = A, B)$. Laat zien dat $(1, p_2)$ een evenwichtsprijsvector is d.e.s.d.a.

$$\frac{1}{1 + p_2^{r^A}} + \frac{p_2}{1 + p_2^{r^B}} = 1,$$

waar $r^h = -\rho^h/(1 - \rho^h)$, en bepaal de evenwichtsallocatie.

Opgave 39 Bewijs dat in Opgave 39 de initiële allocatie een evenwichtsallocatie is en dat $(1, 1)$ een evenwichtsprijsvector is.

4.6 Existentie van walrassiaanse evenwichten

We zullen zo dadelijk en ook bij onze behandeling van een ruil-en-productie-economie blij zijn dat we de volgende abstracte stelling hebben.

Stelling 13 Beschouw een afbeelding

$$\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n,$$

ook wel abstract algemeen-evenwichts-systeem te noemen met de volgende eigenschappen:

1. $\mathbf{z}$ is continu.
2. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++})$.
3. voor elke convergente rij $(\mathbf{p}^m)$ van prijsvectoren in $\mathbb{R}^n_{++}$ met limiet $\mathbf{p}^\star \neq \mathbf{0}$ waarvoor $p^\star_k = 0$ voor een k, is er een l met $p^\star_l = 0$ met de eigenschap dat de rij $(z_l(\mathbf{p}^m))$ naar boven onbegrensd is.

Dan bestaat er een $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$ met $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. (Zo'n $\mathbf{p}^\star$ noemt men ook wel abstract evenwicht.) $\diamond$

Bewijs.— We gaan laten zien dat er een $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ bestaat met $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$. Omdat $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ geldt dan automatisch $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$.

Definieer $\overline{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ door $\overline{z}_k(\mathbf{p}) := \min(z_k(\mathbf{p}), 1)$. Er geldt dus $\overline{\mathbf{z}} \leq \mathbf{z}$ en vandaar ook $\mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{z}}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{z}}(\mathbf{p}) = 0$. We gaan nu laten zien dat er een $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$ bestaat met de eigenschap

$$\Big(\sum_{m=1}^{n} \max(0, \overline{z}_m(\mathbf{p}^\star))\Big)\mathbf{p}^\star \cdot \overline{\mathbf{z}}(\mathbf{p}^\star) = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k(\mathbf{p}^\star) \max(0, \overline{z}_k(\mathbf{p}^\star)). \quad (\star)$$

Als we zo'n $\mathbf{p}^\star$ hebben, dan is dit een $\mathbf{p}$ als gezocht, want omdat $\mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{z}}(\mathbf{p}) \leq 0$ is, is de linkerkant van de ongelijkheid $(\star)$ kleiner dan of gelijk aan 0, dus de rechterkant is dat ook. Dat laatste impliceert, opmerkend dat elke bijdrage in de som daar tenminste gelijk aan 0 is, dat $\overline{z}_k(\mathbf{p}^\star) \leq 0$ voor alle k. Dus is, voor alle k, $0 \geq \overline{z}_k(\mathbf{p}^\star) = \min(z_k(\mathbf{p}^\star), 1)$ waaruit volgt dat $z_k(\mathbf{p}^\star) \leq 0$, zoals gewenst.

We gaan nu een $\mathbf{p}^\star$ als in $(\star)$ construeren. Daartoe definiëren we voor $\epsilon \in (0, 1)$

$$S_\epsilon := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++} \mid \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \text{ en } p_k \geq \frac{\epsilon}{1 + 2n} \ (1 \leq k \leq n).$$

Elke S_ϵ is een niet-leeg, compact en convex deel van $\mathbb{R}^n$. Definieer verder, voor gegeven $\epsilon \in (0, 1)$, $\mathbf{g} : S_\epsilon \to S_\epsilon$ door

$$g_k(\mathbf{p}) := \frac{\epsilon + p_k + \max(0, \overline{z}_k(\mathbf{p}))}{n\epsilon + 1 + \sum_{m=1}^{n} \max(0, \overline{z}_m(\mathbf{p}))}.$$

Verifiëren we wel nog even dat $\mathbf{g}$ goed gedefinieerd is: $\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{p}) = 1$ en $g_k(\mathbf{p}) \geq \epsilon/(n\epsilon + 1 + n \cdot 1) \geq \epsilon/(1 + 2n)$. Verder is $\mathbf{g}$ continu vanwege de continuïteit van $\mathbf{z}$. Volgens de Dekpuntstelling van Brouwer[34] is er een $\mathbf{p}^{(\epsilon)} \in S_\epsilon$ met $\mathbf{g}(\mathbf{p}^{(\epsilon)}) = \mathbf{p}^{(\epsilon)}$. Dus voor alle $\epsilon \in (0, 1)$ hebben we een

[34] Luitzen Brouwer (1881 – 1966), Nederlander (Fries, geboren te Overschie) en wiskundige. Doceerde in Amsterdam. Men hoort wel eens dat hij naast Christiaan Huygens eigenlijk de enige echt grote Nederlands wiskundige was. Grote verdiensten in de algebraïsche topologie. Een van zijn belangrijkste resultaten is de "dekpuntstelling van Brouwer". In 1907 publiceerde hij zijn proefschrift over intuïtionistische wiskunde, een proefschrif dat nadrukkelijk een bom onder de gevestigde orde in de wiskunde wilde wezen, waar een wiskundige uitspraak waar óf onwaar is. Volgens hem is er namelijk een derde weg: iets is waar noch onwaar, omdat het onbekend is. Volgens Brouwer is wiskunde "uitvinden" en niet "ontdekken" (wat is). Interessant om op te merken is dat zijn dekpuntstelling in de intuïtionistische wiskunde niet waar is. Brouwer was een idealist, nogal excentriek en had het onvermogen tot het sluiten van compromissen. In 1902 ging hij over tot het vegetarisme en bleef deze leefwijze trouw totdat een aanrijding bij het bezorgen van een sinterklaascadeautje hem fataal werd.

prijsvector $\mathbf{p}^{(\epsilon)} \in S_\epsilon$ met de eigenschap dat voor alle k

$$p_k^{(\epsilon)}(n\epsilon + \sum_{m=1}^{n} \max(0, \overline{z}_m(\mathbf{p}^{(\epsilon)}))) = \epsilon + \max(0, \overline{z}_k(\mathbf{p}^{(\epsilon)}). \tag{4}$$

Neem nu voor elk geheel getal $j \geq 2$ een $\mathbf{p}^j \in S_{1/j}$ die aan $(\star)$ voldoet. De rij $(\mathbf{p}^j)$ is een begrensde rij in $\mathbb{R}^n_+$. Dus is er vanwege de Stelling van Bolzano-Weierstrass een convergente deelrij, welke we voor het gemak maar weer met $(\mathbf{p}^j)$ zullen aanduiden. Met $\mathbf{p}^\star := \lim_{j\to\infty} \mathbf{p}^j$ geldt dan $\mathbf{p}^\star \geq \mathbf{0}$ en $\sum_{k=1}^n p_k^\star = 1$.

We gaan nu met behulp van de laatste eigenschap in de stelling laten zien dat voor bovenstaande $\mathbf{p}^\star$ geldt $\mathbf{p}^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$. Dat doen we uit het ongerijmde. Stel dus maar eens dat $p_k^\star = 0$ voor een of andere k. Volgens genoemde eigenschap is er een l met $p_l^\star = 0$ met de eigenschap dat de rij $(z_l(\mathbf{p}^j))$ naar boven onbegrensd is. Bekijken we nu (4) voor $k = l$ waaraan elke $\mathbf{p}^j$ voldoet voor $\epsilon = 1/j$. Mede omdat $\lim_{j\to\infty} p_l^j = p_l^\star = 0$, is de limiet $j \to \infty$ van de linkerkant van (4) ook 0. Maar die limiet van de rechterkant is dat niet vanwege de onbegrensdheid naar boven van $(z_l(\mathbf{p}^j))$. En dat is een tegenspraak.

Bekijken we weer (4) waaraan elke $\mathbf{p}^j$ voldoet voor $\epsilon = 1/j$. De afbeelding $\overline{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ continu zijnde, vinden we, de limiet $j \to \infty$ nemende

$$p_k^\star \sum_{m=1}^{n} \max(0, \overline{z}_m(\mathbf{p}^\star)) = \max(0, \overline{z}_k(\mathbf{p}^\star)).$$

Beide kanten van deze gelijkheid met $\overline{z}_k(\mathbf{p}^\star)$ vermenigvuldigen en sommeren over k geeft dat $(\star)$ voor $\mathbf{p}^\star$ geldt, zoals gewenst. Q.E.D.

Opgave 40 Laat zien dat Stelling 13 zonder eis 3 niet meer waar is aan de hand van $\mathbf{z} : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = (-1, p_2/p_1)$. Dan is aan 1 en 2 van de stelling voldaan.

Stelling 14 Elke zuivere ruileconomie waar elke nutsfunctie continu, strikt quasi-concaaf en sterk stijgend is, bezit een walrassiaans evenwicht met positieve evenwichtsprijzen. $\diamond$

Bewijs.— De geaggregeerde overvraag functies z_k en daarmee ook $\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ zijn wel-gedefinieerd. $\mathbf{z}$ als abstract algemeen evenwichtssysteem opvattende, voldoet volgens Stelling 12 aan de voorwaarden van Stelling 13, dus ook aan de conclusie dat er een abstract evenwicht is, *i.e.* een $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ is met $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Volgens Stelling 11 is nu $\mathbf{p}$ een evenwichtsprijsvector en is er dus een walrassiaans evenwicht. Q.E.D.

Stelling 14 is niet van toepasbaar voor een zuivere-ruil-economie met cd-functies. Mede daarom is het goed op te merken dat Stelling 13 voor een zuivere ruileconomie met wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties $\tilde{\mathbf{x}}^h : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(1 \leq h \leq N)$ hetvolgende impliceert: voldoende voor het bestaan van een walrasiaans evenwicht met positieve evenwichtsprijzen is dat de geaggregeerde overvraagafbeelding $\mathbf{z} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ continu is, aan de Wet van Walras voldoet en regulier is. Met Opgave 30(1) volgt daarom:

☺ **20** Een zuivere ruileconomie met louter cd-nutsfuncties heeft een walrassiaans evenwicht met positieve evenwichtsprijzen.

Dit resultaat zullen we in ☺ 21 nog wat verbeteren.

Terugkijkend zien we dat dekpunttheorie van belang is in existentiebewijzen van walrassiaanse evenwichten. Intuï£¡ief moge dat wel duidelijk zijn. In technische zin was het cruciale punt te bewijzen dat de geaggregeerde overvraagfuncties z_i wel-gedefinieerde continue functies van de prijzen zijn. Voldoende daartoe was dat alle Marshalliaanse vraagfuncties continu zijn.

Merken we nog op dat we hierboven nergens differentieerbaarheidseigenschappen verondersteld hebben en dat geen enkele afgeleide op het "toneel" verscheen. Maar het is mogelijk om gladheidseigenschappen mee te nemen en dan een bewijs van resultaten als Stelling 14 te geven dat van die eigenschappen gebruikt maakt.[35]

Opgave 41 Beschouw een zuivere ruileconomie met N consumenten en n goedtypen waar consument h de genormaliseerde cd-nutsfunctie $x_1^{\alpha_1^h} \cdots x_n^{\alpha_n^h}$ en de initiële goederenbundel $(\omega_1^h, \ldots, \omega_n^h)$ heeft. Zet zoals gewoonlijk $O_i := \sum_{h=1}^N \omega_i^h > 0$ en zij $z_j : \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}$ de geaggregeerde overvraagfunctie naar goed j.

a. Bereken $z_j(\mathbf{p})$.

b. Zij A de $N \times n$-matrix gedefinieerd door $A_{hj} := \alpha_j^h$, B de $N \times n$-matrix gedefinieerd door $B_{hj} := \omega_j^h$ en O de $n \times n$ diagonaalmatrix met op plaats ii het getal O_i.
Laat zien dat voor elke $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ geldt $z_j(\mathbf{p}) = 0 \ (1 \leq j \leq n) \ \Leftrightarrow \ A^t \star B \star \mathbf{p}^t = O \star \mathbf{p}^t$.

c. Bestaat er een $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ die eigenvector van de matrix $O^{-1} \star A^t \star B$ bij de eigenwaarde 1 is? En leg uit wat het antwoord op deze vraag te maken heeft met de existentie van evenwichtsprijsvectoren voor de zuivere ruileconomie in kwestie.

d. Bepaal alle walrassiaanse evenwichtsallocaties van de in kwestie in geval elke $\alpha_i^h = \alpha$ voor alle h, i en $\omega_i^h = \omega$ voor alle h en i.

Opgave 41 leidt nog tot:

☺ **21** Een zuivere ruileconomie met N consumenten en n goedtypen waar elke consument een cd-nutsfunctie heeft, heeft een uniek walrassiaans evenwicht.

Opgave 42 Analyseer hoe het zit met de existentie van walrassiaanse evenwichten van een zuivere ruileconomie in geval $n = 1$.

Opgave 43 Stel $N = n = 2$, $u^A(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ en $u^B(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$. Verder stel dat $(5, 4)$ de initiële goederenbundel van consument A en $(1, 1)$ die van consument B is.

a. Bewijs dat $(p_1, 0)$ voor geen enkele $p_1 > 0$ een evenwichtsprijs is en dat $(0, p_2)$ voor geen enkele $p_2 > 0$ een evenwichtsprijs is.

b. Bewijs dat er geen walrassiaans evenwicht bestaat.

c. Is de kern leeg?

4.7 Differentieerbaarheid

In deze deelparagraaf veronderstellen we dat elke consument wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties heeft.

We hebben gezien dat het vinden van de evenwichtsprijsvectoren $\mathbf{p}$ neerkomt op het oplossen van de vergelijkingen $z_i(\mathbf{p}) = 0 \ (1 \leq i \leq n)$. Laten we dit probleem eens aanpakken, zoals Walras noodgedwongen moest doen bij gebrek aan wiskunde die dit probleem aankan, met de "$nn1$-regel uit de softe analyse". Rekening houdend met het feit dat elk veelvoud van een evenwichtsprijsvector weer een evenwichtsprijsvector is, kunnen we ons beperken tot numeraire prijsvectoren $\mathbf{p}$ met $p_n = 1$. Dan resteren n vergelijkingen in $n-1$ onbekenden. De wet van Walras maakt hier $n-1$ vergelijkingen in $n-1$ onbekenden van. Dus hebben we evenveel vergelijkingen als onbekenden en hebben volgens de $nn1$-regel deze vergelijking een oplossing. Maar merken we op dat naast

[35] In Hoofdstuk 8 van het handboek Arrow and Intriligator (1981) is er een te vinden van de Fieldsmedaillewinnaar (*i.e.* de "Nobelprijs" voor wiskundigen) Smale dat gebruik maakt van de Stelling van Sard.

dat deze regel niet zonder meer toepasbaar is, het ook niet uitgesloten is dat de oplossing van de vergelijkingen in kwestie niet-positieve prijzen bevat, wat natuurlijk ook niet zo prettig zou zijn.

Hier is een andere variant van de walrassiaanse telling:

Stelling 15 Zij $(\mathbf{p};\mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht van een zuivere ruileconomie met continue lokaal niet-verzadigde nutsfuncties en wel-gedefinieerde marshalliaanse vraagfuncties. Stel de restricties tot $\mathbb{R}^n_{++}$ der nutsfuncties zijn differentieerbaar met partiële afgeleiden nergens gelijk aan 0. Indien $\mathbf{X}$ inwendig is,[36] dan is voldaan aan de volgende $Nn+n-1$ vergelijkingen

$$\frac{p_i}{p_n} = \frac{\frac{\partial u^h}{\partial x_i^h}(\mathbf{x}^h)}{\frac{\partial u^h}{\partial x_n^h}(\mathbf{x}^h)} \; (1 \leq h \leq N,\; 1 \leq i \leq n-1);$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^h = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^h \; (1 \leq h \leq N);$$

$$\sum_{h=1}^N x_i^h = \sum_{h=1}^N \omega_i^h \; (1 \leq i \leq n-1)$$

in de $Nn+n$ onbekenden x_i^h $(1 \leq h \leq N,\; 1 \leq i \leq n)$, p_i $(2 \leq i \leq n)$. $\diamond$

De eerste en tweede groep van vergelijkingen in Stelling 15 zijn vergelijkingen voor de nutsmaximalisatieproblemen (tweede Wet van Gossen en budgetrestrictie). De derde groep zorgt ervoor dat we met een realiseerbare allocatie te maken hebben; de vergelijking voor $i = n$ is weggelaten vanwege de wet van Walras. Door één der prijzen, bijvoorbeeld p_n, gelijk aan 1 te nemen hebben we weer evenveel vergelijkingen als onbekenden.

Opgave 44 Verlorenvantheemaat vraagt zich af of in plaats van $p_1 = 1$ men ook $x_n^1 = 1$ (als numeraire) zou kunnen zetten.

4.8 Tweede Hoofdstelling van de welvaartstheorie

De Tweede Hoofdstelling van de welvaartstheorie is een wat ingewikkeldere uitspraak, zowel wat de formulering als een bewijs betreft. Ze luidt:

Stelling 16 (Tweede Hoofdstelling van de welvaartstheorie.) Beschouw een zuivere ruileconomie waar elke nutsfunctie continu, sterk stijgend en strikt quasi-concaaf is. Zij $\mathbf{X}$ een pareto-efficïente allocatie. Dan is voor de zuivere ruileconomie waar $\mathbf{X}$ de initiële allocatie is, $\mathbf{X}$ een evenwichtsallocatie en zelfs de enige. $\diamond$

Bewijs.— Beschouw de zuivere ruileconomie waar $\mathbf{X}$ de initiële allocatie is. Natuurlijk is $\mathbf{X}$ ook voor die zuivere ruileconomie pareto-efficiënt. Vanwege Stelling 14 is er een walrassiaans evenwicht $(\mathbf{p};\mathbf{Y})$. We laten zien dat $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$, en dan zijn we klaar. Vanwege ☺ 13 geldt voor alle h dat $u^h(\mathbf{y}^h) \geq u^h(\mathbf{x}^h)$. Omdat $\mathbf{X}$ pareto-efficiënt is, volgt $u^h(\mathbf{y}^h) = u^h(\mathbf{x}^h)$ voor alle h. Stel nu eens dat $\mathbf{y}^r \neq \mathbf{x}^r$ voor een r zou zijn. Dan impliceert de strikte quasi-concaviteit van u^r dat

$$u^r(\frac{1}{2}(\mathbf{x}^r + \mathbf{y}^r)) > \min\left(u^r(\mathbf{x}^r), u^r(\mathbf{y}^r)\right) = u^r(\mathbf{y}^r).$$

Omdat $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^r \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^r$, volgt $\mathbf{p} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{x}^r + \mathbf{y}^r) \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^r$. Dit is echter een tegenspraak met het een maximaliseerder zijn van $\mathbf{y}^r$ voor de nutsfunctie u^r onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^r$. Q.E.D.

[36] *I.e.* elke $\mathbf{x}^h \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Op economische interpretaties van de twee Hoofdstellingen komen we nog in Deel II terug waar deze stellingen voor een meer realistische *setting* behandeld worden. Merk op dat voor de geldigheid van de eerste Hoofdstelling minder geëist wordt dan voor de tweede Hoofdstelling.

We geven nu een versie van de tweede Hoofdstelling van de welvaartstheorie die ook een uitspraak doet over hoe een mogelijke evenwichtsprijsvector eruit ziet.

Stelling 17 (Tweede Hoofdstelling van de welvaartstheorie, variant.) Beschouw een zuivere ruileconomie met elke nutsfunctie continu, strikt quasi-concaaf en sterk stijgend. Zij $\mathbf{X}$ een pareto-efficiï£¡te realiseerbare allocatie. Dan is voor elke prijsvector $\mathbf{p}$ waarvoor

$$\frac{p_i}{p_n} = \mathrm{MSV}^1_{in}(\mathbf{x}^1)\ (1 \le i \le n-1)$$

en elke goederenallocatie $\mathbf{Y}$ waarvoor

$$\sum_{h=1}^{N} y_i^h = O_i\ (1 \le i \le n), \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^h = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^h\ (1 \le h \le N),$$

$(\mathbf{p};\mathbf{Y})$ een evenwichtsallocatie. In het bijzonder voldoet $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. $\diamond$

Bewijs.— Merken we op dat $\sum_{h=1}^{N} x_i^h = O_i\ (1 \le i \le n)$ en $\mathrm{MSV}^1_{in}(\mathbf{x}^1) = \cdots = \mathrm{MSV}^N_{in}(\mathbf{x}^N)\ (1 \le i \le n-1)$. We zijn op zoek naar een goederenallocatie $\mathbf{Y}$ en prijsvector $\mathbf{p}$ waarvoor $\frac{p_i}{p_n} = \mathrm{MSV}^h_{in}(\mathbf{x}^h)\ (1 \le h \le N,\ 1 \le i \le n-1)$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^h = \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^h\ (1 \le h \le N)$ (*i.e.* $\mathbf{X}^h$ maximaliseert u^h onder de restrictie $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^h$) en $\sum_{h=1}^{N} y_i^h = O_i\ (1 \le i \le n)$ is. Welnu, kies $\mathbf{p}$ zodanig dat $\frac{p_i}{p_n} = \mathrm{MSV}^1_{in}(\mathbf{X}^1)\ (1 \le i \le n-1)$ en $\mathbf{Y}$ zodanig dat

$$\sum_{h=1}^{N} y_i^h = O_i\ (1 \le i \le n), \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^h = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^h\ (1 \le h \le N),$$

bijvoorbeeld $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Q.E.D.

Opgave 45 Beschouw een zuivere ruileconomie met $N = n = 2$ waar elke consument dezelfde genormaliseerde cd-nutsfunctie $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ heeft en $\omega_1^A = 100,\ \omega_2^A = 50,\ \omega_1^B = 25, \omega_2^B = 25$. Bewijs dat de allocatie $\mathbf{X} := ((50, 30), (75, 45))$ pareto-efficiënt is. Stel nu $\alpha_1 = 1/3$. Bepaal een realiseerbare allocatie $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$ zodanig dat met $\mathbf{Y}$ als initiële allocatie, $\mathbf{X}$ een evenwichtsallocatie is.

Opgave 46 Gegeven een zuivere ruileconomie tussen 2 subjecten met 2 goederen met als nutsfuncties identieke genormaliseerde cd-nutsfuncties. Stel $O_1 = O_2 = 10$.

a. Toon aan dat $\mathbf{X} = \Big((5, 5), (5, 5)\Big)$ pareto-efficiënt is.

b. Geef een herverdeling van $\boldsymbol{\Omega}$ ongelijk aan $\mathbf{X}$ zodanig dat $\mathbf{X}$ daarbij een walrassiaanse evenwichtsallocatie is.

De constructie van $\mathbf{Y}$ in de tweede Hoofdstelling kan voor het $N = n = 2-$geval geometrisch als volgt geometrisch vertaald worden. Bekijk daartoe een doos van Edgeworth (Figuur **??**) waar een contractkromme getekend C is, $\mathbf{X}$ een punt op de contractkromme (*i.e.* een pareto-efficiënte allocatie) is en de indifferentiekrommen door dat punt van A en B getekend zijn (voor zover deze in de doos liggen). Zij T de raaklijn in $\mathbf{X}$ aan de indifferentiekromme van A.[37] Met $\mathbf{p}$ een prijsvector loodrecht op de richting van T, en $\mathbf{Y}$ een willekeurige allocatie op T, is $(\mathbf{p};\mathbf{X})$ een evenwichtsallocatie indien $\mathbf{Y}$ de initiële allocatie is.

[37] We weten al dat T ook de raaklijn in $\mathbf{X}$ aan de indifferentiekromme van B is.

4.9 Niet-leeg zijn van de kern

Stelling 18 De sterke kern van een zuivere ruileconomie met continue sterk stijgende strikt quasi-concave nutsfuncties is niet-leeg. $\diamond$

Bewijs.— Volgens Stelling 14 bestaat er een evenwichtsallocatie. Volgens Stelling 9 zit deze allocatie in de kern. Dus de kern is niet-leeg. Q.E.D.

Dus als we een voorbeeld willen hebben van een zuivere ruileconomie (met continue nutsfuncties) met een lege kern dan geldt in zo'n voorbeeld dat de nutfuncties niet sterk stijgend zijn of dat ze niet strikt quasi-concaaf zijn. Tot nu toe heb ik zo'n voorbeeld niet paraat.

Opgave 47 Stel $N = n = 2, \quad \mathbf{\Omega}^A = (14, 4), \quad \mathbf{\Omega}^B = (6, 6),$

$$u^A(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad u^B(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

a. Bepaal in de doos van Edgworth de punten die pareto efficiënt zijn.

b. Bewijs dat de initiële allocatie in de kern zit.

c. Bewijs dat de initiële allocatie een evenwichtsallocatie is en dat $(1, 1)$ een evenwichtsprijsvector is.

5 Potpourri

5.1 Uniciteit

In deze deelparagraaf veronderstellen we dat elke marshalliaanse vraagfunctie partieel differentieerbaar is.

Het is best mogelijk dat er meerdere essentieel verschillende evenwichtsprijsvectoren, *i.e.* evenwichtsprijsvectoren die geen veelvoud van elkaar zijn, bestaan. Vooral voor toegepaste economen die algemene evenwichtsmodellen gebruiken kan het vervelend zijn als er meerdere evenwichten zijn. We gaan hieronder nog even nader in op uniciteit van walrassiaanse evenwichten. Met betrekking tot het probleem in kwestie heeft men hieronder ☺ 22 uitgedokterd.

☺ 22 Indien elk tweetal verschillende goederen voor alle prijsvectoren substituten in het groot zijn, dan ligt een evenwichtsprijsvector op een positieve constante na vast.

Laten we dit nader bekijken. Men zegt voor twee verschillende goedtypen i en j dat goed i een <u>substituut in het groot</u> voor j is bij een prijsvector $\mathbf{p}$ indien

$$\frac{\partial z_i}{\partial p_j}(\mathbf{p}) \geq 0.^{38}$$

In dat geval doet dus een stijging van de prijs van j de geaggregeerde overvraag naar i toenemen.

Het aangekondigde resultaat ziet men nu als volgt uit het ongerijmde in. Stel eens dat $\mathbf{p}^\star$ en $\mathbf{p}'$ evenwichtsprijsvectoren zijn waar $\mathbf{p}'$ geen positief veelvoud van $\mathbf{p}^\star$ is. Omdat prijzen positief zijn is $\mu := \max_i \frac{p'_i}{p^\star_i}$ goed gedefinieerd; zij k zodanig dat $\mu = p'_k/p^\star_k$. Omdat $\mathbf{p}^\star$ een evenwichtsprijsvector is en $\mathbf{z}$ homogeen van graad 0 is, is $\mathbf{z}(\mathbf{p}^\star) = \mathbf{z}(\mu\mathbf{p}^\star) = 0$. Merk op dat $\mu p^\star_i \geq p'_i$ voor alle i met tenminste voor een i een strikte ongelijkheid, zeg voor goed l. Verlaag nu eens voor elke $i \neq k$, prijs $\mu p^\star_i$ naar p'_i. Omdat elk der goederen i met goed k een substituut in het groot voor elke prijsvector is, daalt de geaggregeerde overvraag naar goed k, dus $z_k(\mathbf{p}') < z_k(\mu\mathbf{p}^\star) = 0$. Dus $z_k(\mathbf{p}') < 0$. Maar dan is $\mathbf{p}'$ geen evenwichtsprijsvector. Een tegenspraak.

[38] *I.e.* $\frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{h=1}^N \tilde{x}^h_i(\mathbf{p}; \mathbf{p} \cdot \mathbf{\Omega}^h) \geq 0.$

Dit is een fraai resultaat, maar het veronderstellen dat elk tweetal goederen voor alle prijsvectoren substituten in het groot zijn, is vaak zeer onrealistisch.

Opgave 48 Indien goed i een substituut in het groot voor goed j is bij $\mathbf{p}$, is dan ook goed j een substituut in het groot voor goed i bij $\mathbf{p}$?

Opgave 49 Laat zien dat in het geval van cd-nutsfuncties elk tweetal verschillende goedtypen voor alle prijsvectoren substituten in het groot zijn.

Tot nu toe hebben we nog geen geval gezien van evenwichtsprijsvectoren die niet een positieve constante verschillen. Bestaan er überhaupt zulke situaties. Het antwoord daarop is ja. Gemakshalve verwijzen we daarvoor naar de literatuur en merken we nog op dat voor het vinden van dergelijke voorbeelden differentiaaltopologie nuttig is.

We bekeken de existentie- en uniciteitsvraag voor een walrassiaans evenwicht. Hóe zo'n evenwicht (vanuit een gegeven allocatie) tot stand komt, hebben we tot nu toe vrijwel doodgezwegen. Dat is namelijk een geheel andere zaak. In ons model was de auctionaris degene die voor evenwicht zorgt via een of ander dynamisch coördinatieproces, tatonnementproces geheten. Er bestaan heel wat mogelijkheden voor zo'n proces. Men kan ze onderscheiden in simultane en successievelijke en in discrete en continue. Laten we dit even zeer kort bespreken.

Bij discrete tatonnementprocessen vinden er in elke periode prijsaanpassingen plaats, terwijl bij een continu proces dat voortdurend gebeurt. Alle tatonnementprocessen hebben gemeen dat de auctionaris uitgaande van gegeven initiële prijzen probeert de geaggregeerde overvragen gelijk aan 0 te maken. En wel als de overvraag z_i niet 0 is, dat de auctionaris dan p_i zodanig gaat veranderen dat z_i dichter bij 0 komt te liggen. Met $\mathbf{p}_t$ de prijsvector in periode t aanduidend, en met $\mathbf{z}(\mathbf{p}_t)$ de vector van de geaggregeerde overvragen bij $\mathbf{p}_t$, kunnen we een discreet tatonnementproces weergeven door

$$\mathbf{p}_t - \mathbf{p}_{t-1} = F(\mathbf{z}(\mathbf{p}_t))$$

waar F een afbeelding met waarden in $\mathbb{R}^n$ is die tekens behoudt (*i.e.* het verschil van de prijs van elk goed op tijdstip t en tijdstip $t-1$ heeft hetzelfde teken als de geaggregeerde overvraag naar dat goed). Dit is een recursievergelijking. Voor een continu tatonnementproces hebben we iets analoogs:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = F(\mathbf{z}(\mathbf{p})),$$

een differentiaalvergelijking.

Indien goed i een gewoon goed is voor elke consument, dan zal de geaggregeerde overvraag naar goed i zich in tegengestelde richting bewegen aan de prijsverandering (want alle afzonderlijke overvragen naar i doen dat dan). Bij het simultane proces probeert de auctionaris alle markten tegelijkertijd in evenwicht te krijgen. Bij het successievelijke proces, dat al door Walras gebruikt werd, wordt eerst (zeg) markt 1 in evenwicht gebracht, daarna markt 2 tot en met tenslotte markt n waarna men weer opnieuw beginnen moet als daardoor weer een der markten $1, \ldots, n-1$ uit evenwicht geraakt zijn, et cetera. Merken we wel nog op dat er niet geruild wordt zolang het tatonnenementproces nog aan de gang is. Pas als de evenwichtsprijzen bereikt zijn, vinden de ruilhandelingen plaats.

Eenmaal een tatonnementproces hebbend, is het natuurlijk om zich af te vragen hoe het met de stabiliteit van walrassiaanse evenwichten zit. De notie van substituten in het groot speelt daarbij een grote rol. We volstaan hier met het ervoor verwijzen naar het boek Mas-Colell et al. (1995).

5.2 Afgunst

Gegeven een zuivere ruileconomie, twee consumenten i en j en een realiseerbare allocatie $\mathbf{X}$, zegt men i benijdt j in $\mathbf{X}$ indien $u^i(\mathbf{x}^j) > u^i(\mathbf{x}^i)$. En men zegt dat $\mathbf{X}$ afgunstloos is, als geen consument een andere consument benijdt, dus als $u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\mathbf{x}^j)$ voor alle i en j.[39] De allocatie

$$\mathbf{Y} := \frac{1}{N}((O_1, \ldots, O_n), \ldots, (O_1, \ldots, O_n)) \in (\mathbb{R}^n_+)^N$$

is realiseerbaar. Omdat elke consument in $\mathbf{Y}$ dezelfde goederenbundel heeft, is $\mathbf{Y}$ afgunstloos. Het is gemakkelijk om in te zien dat een allocatie die afgunstloos is niet pareto-efficiënt hoeft te zijn.[40]

Opgave 50 Laat zien hoe dat in te zien.

Stelling 19 Elke zuivere ruileconomie waar elke consument een continue, strikt quasi-concave en sterk stijgende nutsfunctie heeft, bezit tenminste één afgunstloze pareto-efficiënte allocatie. $\diamond$

Bewijs.— De allocatie $\mathbf{Y} := \frac{1}{N}((O_1, \ldots, O_n), \ldots, (O_1, \ldots, O_n)) \in (\mathbb{R}^n_+)^N$ is realiseerbaar en afgunstloos. Dus $u^i(\mathbf{y}^i) \geq u^i(\mathbf{y}^j)$ voor alle i en j. Beschouw deze allocatie nu als initiële allocatie. Zij $(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ een walrassiaans evenwicht; existentie daarvan is gegarandeerd door Stelling 14. Volgens de eerste Hoofdstelling van de welvaartstheorie is $\mathbf{X}$ pareto-efficiënt. Verder merken we op dat met $m^1 := \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^1$, voor alle h:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^h = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^h = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^1 = m^1.$$

We laten tenslotte uit het ongerijmde zien dat $\mathbf{X}$ ook afgunstloos is. Stel daartoe dat $\mathbf{X}$ dat niet is. Er bestaat nu een consument i die een bepaalde consument j in $\mathbf{X}$ benijdt, *i.e.* $u^i(\mathbf{x}^j) > u^i(\mathbf{x}^i)$. Maar, omdat $\mathbf{X}$ een evenwichtsallocatie is, moet dan wel $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i < \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i$, een tegenspraak. Q.E.D.

Naast de notie van afgunstloosheid voor een realiseerbare allocatie bestaat die van coalitionele afgunstloosheid: men eist dan niet alleen dat individuele consumenten elkaar niet benijden maar dat ook coalities van dezelfde grootte elkaar niet benijden.[41]

5.3 Toegepaste algemene evenwichtstheorie

Nogal wat beleidmakers zijn geïnteresseerd in de economische effecten van specifieke beleidsinstrumenten. Het is voor hen daarom prettig om een ijkpunt te hebben dat kan dienen om verschillende vormen van economisch beleid met elkaar te vergelijken. In dit verband wordt door hen regelmatig een beroep gedaan op (neoklassieke) economen die zich bedienen van toegepaste algemene evenwichtsmodellen. Steeds snellere computers om deze modellen mee door te rekenen heeft deze ontwikkeling alleen maar kracht bijgezet. Toegepaste algemene evenwichtsmodellen worden doorgaans op maat ontworpen voor de reëlewereldproblemen die men ermee wil aanpakken. Vaak worden daarbij de achterliggende fundamentele optimaliseringsproblemen vereenvoudigd vanwege een gebrek aan data of vanwege het beoogde doel van het model. Een van de vereenvoudigingen is het aggregeren van artikelen in categorieën en het aggregeren van subjecten in sectoren. Voor elke sector veronderstelt men een representatief subject en voor elke categorie een representatief artikel. Met betrekking tot het omgaan met data speelt de zogenaamde *social accounting matrix* een rol. Deze beschrijft op een bondige manier de economische interactie tussen de verschillende sectoren. Een andere vereenvoudiging is dat men vaak ervan uitgaat dat men te maken heeft met volkomen concurrentie en geen rekening houdt met zaken als externe effecten, onevenwichtigheden en intertemporeel gedrag. Het is verder de gewoonte om uit te gaan van specifieke typen nuts- en productiefuncties, bijvoorbeeld ces-functies en de parameters daarvan te kalibreren aan de hand van een waarneming die men als algemeen evenwicht denkt te kunnen zien. Vanwege

[39] De notie "afgunstloos" is geïntroduceerd door D. Foley in 1967.

[40] Menig auteur noemt een realiseerbare allocatie aanvaardbaar als deze zowel pareto-efficiënt als afgunstloos is. De auteur zal dat niet doen omdat pareto-effici¨ entie *au fond* niets met de gangabare betekenis van aanvaardbaarheid te schaften heeft.

[41] We gaan daar hier niet nader op in en verwijzen de geïteresseerde lezer naar bijvoorbeeld het artikel Gabszewicz (1975).

de complexiteit die dit soort problemen normaliter hebben, is het gebruik van een computer en geschikte programma's vrijwel altijd noodzakelijk. Een populair programma is GAMS. Dit in de economie zeer populaire pakket is ontwikkeld door de Wereldbank en speciaal voor algemene evenwichtsberekeningen en grote gegevensbestanden ontworpen. Het is eigenlijk een modelleersysteem dat een aantal routines ondersteunt (die al dan niet gebruik maken van de ontdekkingen van Scarf; zie voetnoot 18). Men kan bij GAMS direct de te optimaliseren objecten ingeven. Omdat algemene evenwichtsvergelijkingen in nogal wat voorkomende gevallen algebraïsch van aard zijn, bijvoorbeeld als men met cd-functies werkt, is het extra verleidelijk om ze dan op te lossen met een computeralgebraprogramma zoals MAPLE. Dit programma behoort tot de computeralgebrapakketten, terwijl GAMS tot de wereld van de zogenaamde LP-software behoort. Voor meer over toegepaste algemene evenwichtstheorie verwijzen we naar de "bijbel" Ginsburgh and Keyzer (1997) op dat gebied en verder naar de boeken Shoven and Whalley (1992) en (ook voor GAMS) Amman et al. (1996).

A Vectormaximalisatie

$\top$ **1** (Ongelijkheidsrelaties op $\mathbb{R}^n$.) Op $\mathbb{R}^n$ definieert men de relaties $\geq, >, \gg$ door:

– $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$: $x_k \geq y_k$ $(1 \leq k \leq n)$;

– $\mathbf{x} > \mathbf{y}$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ en $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$;

– $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$: $x_k > y_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

Verder duiden we met $\leq, <, \ll$ de duale relaties van respectievelijk $\geq, >, \gg$ aan. De relatie $\geq$ is reflexief, transitief, maar niet vergelijkbaar. De relaties $>$ en $\gg$ zijn transitief, maar niet reflexief.

Merk nog op dat als $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ geldt, dat dan ook $\alpha\mathbf{x} \leq \alpha\mathbf{y}$ $(\alpha \geq 0)$ en $\mathbf{x}+\mathbf{z} \leq \mathbf{y}+\mathbf{z}$ $(\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n)$ gelden.

$\top$ **2** (Sterke en zwakke maximaliseerders.) Zij X een verzameling en $f: X \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding. $x \in X$ heet (sterke) maximaliseerder van f als er geen $y \in X$ is met $f(y) > f(x)$. En $x \in X$ heet zwakke maximaliseerder van f als er geen $y \in X$ is met $f(y) \gg f(x)$.[42]

Natuurlijk geldt dat elke maximaliseerder ook een zwakke maximaliseerder is. In het (scalaire) geval waar $p = 1$ komen de twee noties op hetzelfde neer en corresponderen ze met de gebruikelijke notie van maximaliseerder in die context.

$\top$ **3** (Geval van strikt quasi-concave componentfuncties.) Zij $f: X \to \mathbb{R}^p$ een functie. Als X convex is en elke componentfunctie $f_k : X \to \mathbb{R}$ strikt quasi-concaaf is, dan geldt voor alle $x \in X$:

x is een sterke maximaliseerder van $f \Leftrightarrow x$ is een zwakke maximaliseerder van f.[43]

$\top$ **4** (Algemene eigenschappen.) Zij $f: X \to \mathbb{R}^p$ een continue functie, waar X een metrische ruimte is. Dan is de verzameling der zwakke maximaliseerders van f gesloten. Indien X tevens niet-leeg en compact is, dan geldt nog:

– voor alle $x \in X$ is er een sterke maximaliseerder z van f met $f(x) \leq f(z)$;

– de verzameling der zwakke maximaliseerders van f is compact en niet-leeg;

– de verzameling der sterke maximaliseerders van f is niet-leeg.

[42] Let op dat de notie van sterke maximaliseerder niet als volgt gedefinieerd is: $x \in X$ heet sterke maximaliseerder van f als $f(y) \leq f(x)$ voor alle $y \in X$.

[43] Hier is een bewijs. Stel x zou een zwakke maximaliseerder van f maar geen sterke zijn. Dat laatste betekent dat er $y \in X$ is met $f(y) > f(x)$. Dan is $x \neq y$ en impliceert voor elke j de strikte quasi-concaviteit van f_j dat $f_j(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) > \min(f_j(x), f_j(y)) = f_j(x)$. *I.e.* dat $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \gg f(x)$, hetgeen in tegenspraak is met het een zwakke maximaliseerder zijn van x.

⊤ **5** (Gewichten.) Onder een lineair gewicht (op $\mathbb{R}^p$) verstaan we een vector $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^p_+$ met $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. Onder een strikt lineair gewicht (op $\mathbb{R}^p$) verstaan we een vector $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^p_{++}$. Elk strikt linear gewicht is een lineair gewicht.

⊤ **6** (Karakterisatie met gewichten.) Zij $f : X \to \mathbb{R}^p$ een functie en $\boldsymbol{\eta}$ een lineair gewicht op $\mathbb{R}^p$.

- Stel x is de unieke maximaliseerder van $\sum_{k=1}^p \eta_k f_k$. Dan: x is een sterke maximaliseerder van f.
- Stel $\boldsymbol{\eta}$ is strikt. Dan: x maximaliseerder van $\sum_{k=1}^p f_k \Rightarrow x$ sterke maximaliseerder van f.
- x maximaliseerder van $\sum_{k=1}^p f_k \Rightarrow x$ zwakke maximaliseerder van f.

⊤ **7** Zij X een convex deel van een lineaire ruimte en zij $f : X \to \mathbb{R}^p$ een functie. Stel dat elke coördinaat-projectie $f_i : X \to \mathbb{R}$ concaaf is. Dan geldt voor alle $x \in X$: x is een zwakke maximaliseerder van $f \Leftrightarrow$ er bestaat een lineair gewicht $\boldsymbol{\eta}$ op $\mathbb{R}^p$ zó dat x een maximaliseerder van $\sum_{k=1}^p f_k$ is.

⊤ **8** Zij X een verzameling, $f : X \to \mathbb{R}^p$ een functie. Noteer, voor $i = 1, \dots, p$ en $a \in X$

$$C_i(a) := \{x \in X \mid f_j(x) \geq f_j(a) \text{ voor alle } j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}\}.$$

Dan: a is een sterke maximaliseerder van $f \Leftrightarrow$ voor alle i is a een maximaliseerder van $f_i \upharpoonright C_i(a)$.

Referenties

H. Amman, D. Kendrick, and J. Rust, editors. *Handbook of Computational Economics*, volume 1 of *Handbook in Economics 13*. Elsevier, Amsterdam, 1996.

J. Arrow and M. Intriligator, editors. *Handbook of Mathematical Economics*, volume I of *Handbooks in Economics*. North-Holland, Amsterdam, third edition, 1981.

K. Arrow and G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22:265–290, 1954.

P. Gabszewicz. Coalitional fairness of allocations in pure exchange economies. *Econometrica*, 43: 661–668, 1975.

V. Ginsburgh and M. Keyzer. *The Structure of Applied General Equilibrium Models*. MIT Press, Cambridge, 1997.

G. Jehle and P. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*. Addison Wesley, second edition, 2001.

A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York, 1995.

L. McKenzie. On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. *Econometrica*, 22:147–161, 1954.

H. Nikaido. On the classical multilateral exchange problem. *Metroeconomica*, 8:135–145, 1956.

H. Scarf. *The Computation of Economic Equilibria*. Yale University Press, 1973.

J. Shoven and J. Whalley. *Applying General Equilibrium*. Cambridge University Press, 1992.

J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1953.

L. Walras. *Élements d'Économie Politique Pure*. R. Picon & R. Durand-Auzias, Paris, (1926) 1874.