

Niet-coöperatieve Speltheorie

Een speelse inleiding

Pierre v. Mouche

December 2005

Verbeterde versie 0.987 (oktober 2019)



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Over speltheorie</b>	<b>9</b>
1.1	Wat is speltheorie? . . . . .	9
1.2	Basisnoties . . . . .	11
1.3	Enkele concrete spelen . . . . .	12
1.4	Algemene bekendheid. . . . .	18
1.5	Twee typeringen van spelen . . . . .	19
1.6	Oplossingsconcepten . . . . .	27
1.7	Het nim- en hexspel nader bekeken . . . . .	31
1.8	Historische opmerkingen . . . . .	34
1.9	Opgaven . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Spelen in strategische vorm</b>	<b>41</b>
2.1	Notie . . . . .	41
2.2	Vocabulaire . . . . .	42
2.3	Bepaling van allerlei objecten . . . . .	46
2.4	Voorbeelden . . . . .	48
2.5	Antagonistische spelen . . . . .	49
2.6	Opgaven . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Spelen in uitgebreide vorm</b>	<b>55</b>
3.1	Notie . . . . .	55
3.2	Strategieën . . . . .	57
3.3	Normaliseren . . . . .	58
3.4	De procedure van de terugwaartse inductie . . . . .	59
3.5	Deelspelen en deelspelperfectie . . . . .	61
3.6	Eindige combinatorische spelen . . . . .	62
3.7	Eindige strikt competitieve spelen . . . . .	64
3.8	Opgaven . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Oligopolies</b>	<b>73</b>
4.1	Classificatie . . . . .	73
4.2	Monopoliespel . . . . .	74
4.3	Oligopolies . . . . .	78
4.4	Van oligopolie naar volledige concurrentie . . . . .	81

4.5	Von-stackelberg-duopolie-spel . . . . .	83
4.6	Prijsleiderschap-duopolie-spel . . . . .	84
4.7	Opgaven . . . . .	85

## VOORWOORD

(Standaard) speltheorie houdt zich bezig met mathematische modellen van conflict en samenwerking uit de reële wereld tussen tenminste twee rationele en intelligente spelers. De wiskundige J. von Neumann was een van de grondleggers van deze discipline. Het typoscript biedt een panorama van de niet-coöperatieve speltheorie. De bedoeling ervan is de lezer vertrouwd te maken met spelen in uitgebreide en in strategische vorm. Zowel abstracte theorie als toepassingen ervan, met name in de gezelschapsspelenwereld en de economie, komen aan de orde.

Goed is op te merken dat met wat goede wil speltheorie gezien kan worden als een wiskundige discipline maar dat deze wel wat anders is dan bijvoorbeeld getaltheorie. De voornaamste reden daarvan is dat speltheorie niet zonder meer los te koppelen is van de reële wereld. Zoals het geval is met alle theorieën die pretenderen een gedeelte van de reële wereld te beschrijven, heeft men daarbij regelmatig te maken met (intuïtieve) beschouwingen over die wereld. Het gevaar bestaat dan echter dat men mathematische rigoreusiteit verliest en dat men zich, en dat geldt speciaal voor zuivere wiskundigen, oncomfortabel begint te voelen. Met dit gevaar zal men hier moeten leven omdat de verhandeling hier niet mathematisch rigoreus en de auteur is er niet bang om woorden te gebruiken die wiskundig niet geformaliseerd zijn. Natuurlijk kan alles ook mathematisch rigoreus, maar daarvoor moet men wel uitgerust zijn. Dit typoscript is dus met name geschikt voor personen die nog niets van speltheorie afweten en voor wiskundig minder onderlegde lezers. Inderdaad, bij het aanleren van speltheorie kan men een heel stuk komen met slechts een bescheiden wiskundige achtergrond. Dat komt omdat vele mathematische argumenten in het algemeen niet slechts elementair van aard maar ook nog eens simpel zijn.

Het kan geen kwaad nog wat nader in te gaan op het verschil tussen softe en harde wiskunde. Welnu, wiskunde<sup>1</sup> kan men bedrijven op een aantal niveaus van precisie. Om het zwart-wit te stellen: harde (lees “mathematische rigoureuse”) wiskunde en softe (lees “niet-mathematisch rigoureuse”) wiskunde. Vaak is softe wiskunde slordige wiskunde.<sup>2</sup> Herhaaldelijk worden in de softe wiskunde onder meer de volgende slordigheden uitgehaald:<sup>3</sup>

- Bewijzen zijn niet volledig of slechts schijn. Oorzaken daarvan zijn onder andere dat over details en technische kwesties wordt heengestapt.
- Allerlei mathematische objecten zijn niet precies gespecificeerd. Bijvoorbeeld functies zijn niet netjes gedefinieerd doordat men niet precies vastlegt wat hun domein is.

---

<sup>1</sup>Voor meta-beschouwingen over wiskunde, onder andere voor waarmee wiskundigen zich bezighouden, kan de auteur het boek Dieudonné (1987) van Dieudonné aanbevelen.

<sup>2</sup>Het is interessant om op te merken dat het bij algebraïsche onderwerpen moeilijker is om soft bezig te zijn (lees “te knoeien”) dan in de analyse.

<sup>3</sup>Dat komt omdat meniggen die zich met speltheorie bezig houdt, geen wiskundige is en daarom aan het accent waarmee hij de taal der wiskunde spreekt, opvalt.

- Men gaat soepel om met het onderscheid tussen zwakke en sterke ongelijkheden. Ook maakt men niet altijd goed onderscheid tussen monotone en strikt monotone functies en is men slordig met de vertaling daarvan in termen van eerste-orde-afgeleiden.<sup>4</sup> Als men ongelijkheidsrestricties in een maximalisatieprobleem door gelijkheidsrestricties vervangt, dan neemt men aan dat dat geoorloofd is.<sup>5</sup>
- Als men een functie (eenmaal, tweemaal, partieel, ...) differentieert, dan doet men dat zonder zich af te vragen of dat wel kan.
- Als men een functie maximaliseert, dan neemt men aan dat deze een maximum heeft. En vaak ook nog dat er een unieke maximaliseerder is welke men bepaalt met een eerste-orde-conditie, alhoewel deze veelal slechts een nodige voorwaarde voor een inwendig lokaal extreem is. Eventueel controleert men daarna ook nog een tweede-orde-conditie.<sup>6</sup>
- Men gebruikt wat de auteur de nn1-regel noemt:  $n$  vergelijkingen in  $n$  onbekenden hebben één oplossing.<sup>7</sup>

Men beseffe nog dat er ook een zekere wiskundige rijpheid nodig is om bewijzen te kunnen (en willen) lezen.<sup>8</sup> Vaak kan soft gereken geen kwaad in speciale contexten, maar als men zo'n veilige haven verlaat, dan kunnen er allerlei enge dingen gebeuren. Het moge vanzelfspreken dat men zeer voorzichtig met softe wiskunde om moet gaan. Gezond verstand, additionele kennis en wat geluk zijn bij een softe wiskundige aanpak mooi meegenomen. Wil men echter valkuilvrij leven, dan zal men dus zijn toevlucht tot mathematisch rigoureuze wiskunde moeten zoeken.

De organisatie van het typoscript is als volgt. Hoofdstuk 1 is inleidend van aard en beoogt onder meer de lezer geïnteresseerd in de materie te krijgen. Vervolgens komen de twee van de drie belangrijkste (mathematische) speltypen aan de orde: in Hoofdstuk 2 bekijken we spelen in strategische vorm en in Hoofdstuk 3 spelen in uitgebreide vorm. Het derde belangrijke speltype van spelen in karakteristieke functievorm komt slechts in Hoofdstuk 1 even aan de

---

<sup>4</sup>Als  $f$  bijvoorbeeld een strikt dalende functie is, dan komt het voor dat men dat in  $f' < 0$  vertaalt.

<sup>5</sup>Op die manier kan men dan veelal de Multiplicatorenstelling van Lagrange gebruiken in plaats van de toch wel ingewikkeldere Stelling van Karush-Kuhn-Tucker.

<sup>6</sup>Zo ging de Nobelprijswinnaar in de economie Hicks in zijn boek *Value and Capital*, tweede uitgave, pagina 306 aardig in de fout door te beweren dat voor het hebben van een maximum van een differentieerbare functie gedefinieerd op  $\mathbb{R}$  het niet alleen nodig is dat de eerste-orde-afgeleide 0 is maar ook dat de tweede-orde-afgeleide kleiner dan 0 is.

<sup>7</sup>Een specifiek probleem met de nn1-regel is dat  $n$  vergelijkingen in  $n$  onbekenden best wel een unieke oplossing kunnen hebben, maar dat deze niet voldoet omdat men bijvoorbeeld veronderstelt dat de onbekenden ook nog eens positieve getallen zijn.

<sup>8</sup>Voor wie dat zou wensen ook te kunnen en zo rigoureuze bewijzen te kunnen onderscheiden van niet-rigoureuze, kan het volgen van degelijke eerste en tweede jaars wiskundevakken aan een universiteit een stap in de goede richting zijn. Maar laten we eerlijk zijn, mathematisch rigoureuze wiskunde is eigenlijk alleen weggelegd voor wiskunde- of natuurkundestudenten of voor studenten van andere studierichtingen met goede mathematische vaardigheden en sterke theoretische interesse.

orde. (Dat doen we omdat we ons willen concentreren op niet-coöperatieve speltheorie.) Spelen in uitgebreide vorm behelzen een speltype dat wellicht het meest beantwoord aan het idee dat men zou kunnen hebben over wat een spel dan wel is. Hoofdstuk 4 bekijkt diverse oligopolie modellen vanuit speltheoretisch gezichtspunt. Een en ander komt in een vervolgdeel van dit typoscript nader aan de orde. Met name geldt dit voor spelen in strategische vorm en nash-evenwichten, het speltype respectievelijk oplossingsconcept waarop in dit vak een zekere nadruk ligt.

De auteur behoudt zich verder altijd het recht voor af en toe een meta-wetenschappelijke opmerking te maken.<sup>9</sup>

Omdat dit typoscript een versienummer  $< 1$  heeft, voelt de auteur zich nog niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden; aan een betere versie wordt gewerkt. Uiteraard juicht de auteur verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen toe.<sup>10</sup>

September 2005,

P. v. Mouche

---

<sup>9</sup>Dit gebeurt veelal in voetnoten. Daardoor kan de stijl alleen maar levendiger worden.

<sup>10</sup>Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem  $\text{\LaTeX}$  gebruikt onder het (idealistische) openbron-besturingssysteem Linux.

In science - and in fact, in most things - it is usually best to begin at the beginning. In some things, of course, it is better to begin at the other end. For instance, if you wanted to paint a dog green, it might be best to begin with the tail, as it doesn't bite at that end. (The Professor's lecture, Lewis Carroll)



# Hoofdstuk 1

## Over speltheorie

Dit hoofdstuk is inleidend van aard en beoogt onder meer de lezer<sup>11</sup> geïntereiseerd in de materie te krijgen. Het legt uit wat speltheorie is, maakt wat historische opmerkingen, introduceert enkele concrete spelen, probeert wat orde in het oerwoud van spelen aan te brengen en bespreekt belangrijke speltheoretische noties en oplossingsconcepten, waaronder het nash-evenwicht. Speciale aandacht is er voor het nim- en hexpel. Het hele typoscript en in het bijzondere dit hoofdstuk kan best hier en daar wat moeilijk te lezen zijn voor beginners die pietjes-precies zijn. Zij moeten zich maar even niet ongerust maken want straks, in deel II van het typoscript, vindt er een tweede ronde plaats waar de dingen op hun pootjes terecht komen en er vrijwel geen spanning meer is tussen de reële-wereld- en mathematische structuur.<sup>12</sup>

### 1.1 Wat is speltheorie?

Speltheorie gaat niet over het spellen van woorden maar over dingen als schaakspelen en cournot-oligopolies. Volgens sommigen is speltheorie het tot nu toe meest belovende ontwikkelde mathematisch hulpmiddel om sociaal gedrag van mensen mee te analyseren en zelfs het beste wat de sociale wetenschappen is overkomen. In het bijzonder is het een van de krachtigste "wapens" die een (micro-)economist tegenwoordig tot zijn beschikking heeft. Verder kan men nog stellen dat speltheorie een unificerende discipline is, net als de veldentheorie in de natuurkunde.

De auteur is geneigd deze karakterisering te be-amen, maar zal ze verder maar laten voor wat ze is. Wel merkt hij nog op dat de Nobelprijs voor economie in 1994 toegekend werd aan Nash, Harsanyi en Selten voor hun fundamentele

---

<sup>11</sup>Om misverstanden te voorkomen: woorden als "hij" zijn slechts gebruikt vanwege stilistische redenen en zijn uiteraard niet bedoeld in het kader van een of ander onderscheid.

<sup>12</sup>De uiteenzettingen in dit hoofdstuk zouden kunnen dienen om over speltheorie mee te kunnen praten zonder er echt veel van af te weten en zonder dat de gesprekspartners dat al te snel door hebben.

bijdragen aan de speltheorie. Daarmee heeft de speltheorie eindelijk een min of meer officiële erkenning (in de economische wetenschap) gekregen. Speltheorie levert een taal levert, die bij uitstek geschikt is om conceptueel in te denken. Het is zelfs een universele taal voor de sociale wetenschappen en bedient zich niet van allerlei ad hoc concepten. Tegenwoordig worden verschillende typen van spelen ook op een abstracte manier bestudeerd. De algemene resultaten voor deze spelen kan men onder meer toepassen in economische contexten, zoals in de theorie van de industriële organisatie, in de algemene evenwichtstheorie van volledige concurrentie, in de theorie van internationale handel en in de theorie van veilingen.

Maar laten we nu eens proberen te karakteriseren wat speltheorie is:

Speltheorie houdt zich bezig met mathematische modellen van situaties van conflict en samenwerking uit de reële wereld tussen tenminste twee rationele<sup>13</sup> en intelligente spelers.

Zo'n model heet ook wel mathematisch spel. In plaats van "spelers" spreekt men hier ook wel van "beslissers".

Bovenstaande definitie van speltheorie laat dus zeker toe dat speltheorie zich bezighoudt met de bestudering van activiteiten van recreatieve aard zoals gezelschapsspelletjes. Haar meerwaarde ligt in mogelijke toepassingen in de sociale wetenschappen (economie, sociologie, psychologie, antropologie, politicologie), in de oorlogsvoering en het ontwerpen van computerspelen. "Meerpersoons interactieve beslissingstheorie" zou misschien een betere benaming dan "speltheorie" zijn. In de natuurwetenschappen heeft speltheorie, voor zover de auteur weet, slechts toepassingen in de biologie (in het kader van de Darwinistische theorie).<sup>14</sup>

Speltheorie bouwt voort op fundamentele resultaten van de beslissingstheorie, i.e. op de theorie die zich bezighoudt met één beslisser; kanstheorie ontwikkeld onder andere door Pascal (1623-1662), Bernoulli (1700-1782) en Bayes (1702-1786) speelt daarbij een fundamentele rol. Een doel van de speltheorie is om te voorspellen hoe spelers zich gedragen. Speltheorie bedient zich van laboratoriumexperimenten om haar theorieën te testen.<sup>15</sup>

Merk op dat de gegeven definitie van speltheorie uitgaat van rationale intelligente spelers; dit duidt er nog op dat het hier eigenlijk om traditionele speltheorie gaat. Speltheorie houdt zich dus bezig met problemen waar meer dan één speler in voorkomt. Situaties met slechts één speler worden bestudeerd in de klassieke optimaliseringstheorie en vormen in de speltheorie een enigszins ontaarde situatie. Voor problemen met meer dan één speler ontbrak in den beginne nog het

<sup>13</sup>Let op: maakt U niet de fout hier van "rationale" te spreken.

<sup>14</sup>Ideeën die eerst in een biologische context werden ontwikkeld, worden nu ook op economische problemen toegepast.

<sup>15</sup>Men moet zich er echter van bewust zijn dat dergelijke experimenten nog altijd iets anders zijn dan de (echte) reële wereld: laboratoriumexperimenten en vooral klaslokaalexperimenten kunnen voor de speler een leuke afwisseling zijn waarbij het niet altijd uitgesloten is dat hij er een paar centjes mee kan verdienen, zelfs door er maar gewoon een beetje bij te hangen. Daar ja, maar in een soortgelijke situatie in de reële wereld misschien niet omdat daar grotere belangen op het spel kunnen staan (en de situatie eigenlijk dus niet soortgelijk is).

wiskundig gereedschap. Speltheorie *an sich* is nu een vakgebied in de wiskunde geworden.

Een en ander zal hieronder nu nader toegelicht worden.

## 1.2 Basisnoties

In de situaties van conflict en samenwerking uit de reële wereld die we op het oog hebben zijn er dus spelers. Typisch verder is dat er daar ook uitbetalingen plaatsvinden. We lichten deze noties hier nu toe.

### *Speler.*

Bij “spelers” kan men onder andere denken aan individuen, organisaties, naties en computers. We bekijken alleen situaties waarbij er eindig veel spelers zijn. De spelers nummeren we vaak, zeker als we abstract bezig zijn, met  $1, \dots, n$ . Vaak is er een speler die begint. We noemen deze dan speler 1. Als er twee spelers zijn, dan is de andere dus speler 2. In geval van twee spelers spreekt men bij diverse bordspelen zoals schaken, dammen en hex liever van wit en zwart omdat bij die spelen de spelers zetten doen met behulp van witte en zwarte objecten. De witte speler doet daar doorgaans de eerste zet.

Wij gaan er steeds vanuit dat het bij het spelen van het spel duidelijk is hoe de spelers genummerd zijn, in het bijzondere wie speler 1 is. In de reële wereld kan dat bijvoorbeeld door een loting plaatsvinden. Dat kan afhankelijk van het spel iets oneerlijks geven omdat het vaak van belang is welke speler men is. Dat kan op te lossen zijn door het spel meerdere malen te spelen, bijvoorbeeld twee maal in het geval van het schaakspel waarbij de speler 1 van het eerste spel speler 2 in het tweede spel wordt.<sup>16</sup>

### *Uitkomst en uitbetaling.*

Een spel kan doorgaans op verschillende manieren gespeeld worden, i.e. verschillende uitkomsten hebben.<sup>17</sup> Welke dat zijn, wordt door de spelregels bepaald. Heel wat is hier mogelijk. Bijvoorbeeld er is één winnaar en alle andere spelers zijn verliezers. Of, in geval van twee spelers, er is één winnaar en één verliezer of het is remise (ook wel gelijkspel genoemd). Bij elke uitkomst horen uitbetalingen. Vaak houden uitbetalingen in dat er met elkaar afgerekend wordt middels geldelijke transacties. Maar het kan bijvoorbeeld ook zo zijn dat iemand gewoon gewonnen heeft zonder dat hij daarbij iets ontvangt. Inderdaad een uitbetaling kan echt van alles inhouden, bijvoorbeeld dat speelster Zemfira elke andere speler 5 jaar lang elke maand 10 Euro geeft en dan ook nog eens voor de andere spelers op elke 10-de februari het avondeten moet koken. Ook kan een uitbetaling de dood inhouden. Men denke ook aan gezelschapsspelen als “New Games” die in bepaalde alternatieve idealistische kringen gespeeld worden:

<sup>16</sup>Maar ja als uitbetalingen de dood kunnen inhouden, zoals bij Russische roulette, dan wordt het wel erg moeilijk om het spel nog eens over te doen.

<sup>17</sup>Let op dat we ons hier niet reppen over de tijdsduur waarin de spelafloop plaats vindt. Ook aan spelen die oneindig lang duren kan men vaak een zinvolle betekenis aan de notie van uitbetaling geven.

daar wint of verliest er niemand. Uitbetalingen kunnen ook aan groepen van spelers plaatsvinden in plaats van aan de spelers afzonderlijk; vaak vindt er dan nog voor elke groep een verdere verdeling van zo'n uitbetaling aan de leden die groep plaats.

Bij de modellen die we maken, i.e. de mathematische spelen, worden de uitbetalingen doorgaans gemodelleerd middels reële getallen. Dat kan nader gerechtvaardigd worden. Er is namelijk een hele theorie over, de nutstheorie; de notie van verwacht subjectief nut speelt een belangrijke rol daarin en wordt genomen voor de genoemde reël-waardige uitbetaling. Wij zullen hier voor het gemak afzien van een bespreking van die theorie omdat voor de dingen die we in dit typoscript gaan doen het niet echt nodig is daar vertrouwd mee te zijn. In termen van nut mag men uitbetaling (aan een speler) opvatten als “genoten bevrediging” aan het einde van het spel.

### 1.3 Enkele concrete spelen

We geven hier nu een lijst van reële-wereld-situaties die we later als mathematisch spel zullen modelleren. Op deze manier krijgen we een aantal concrete spelen waarmee we de abstracte theorie kunnen illustreren. Men verwarre in dat verband zo'n situatie niet met het bijhorende mathematische spel.

Allereerst zijn daar situaties die al bekend staan als spel, namelijk gezelschapsspelen, zoals

- schaken,
- dammen,
- boter-kaas-en-eieren,
- kamertje-verhuren,
- nim,
- hex,
- mensch-erger-Je-niet,
- monopolie,
- Sint-Petersburg-casino.
- Go.

Verder zijn er spelletjes die men speelt om iemand het zeggen te geven, zoals

- iet-wiet-waait-is-eer-lijk-weg,
- steen-papier-schaar,
- Russische roulette,

- gelijke kanten.

Ook vermelden we de volgende volledig verzonnen reële-wereld-situaties

- gevangenendilemma,
- angsthazen,
- gevecht der geslachten,
- havik-duif,
- ultimatum,
- kolonel Blotto,
- granaat.

En ook verscheidene economische situaties bijvoorbeeld over

- oligopolies,
- grensoverschrijdende vervuiling,

zijn te noemen. Deze worden vaak al van meet af aan als mathematisch spel gepresenteerd.<sup>18</sup> En wat nog te denken van computerspelen zoals tomb-raider-3 of van tikkertje en voetbalspelen?

We leggen nu uit wat deze reële-wereld-situaties inhouden; maar voor schaken, dammen, mensch-erger-Je-niet, monopolie en go doen we dat niet (omdat dat wat te complex hier is).<sup>19</sup> We beginnen met de gezelschapsspelen waar het uitleggen het geven van de spelregels betreft.

#### Boter-kaas-en-eieren

Dit spel is een van de bekendste en oudste spelletjes die de mens kent.<sup>20</sup> Beschouw een vierkant bord met 9 vierkante hokjes: 3 rijen van 3 hokjes onder elkaar. Er zijn twee spelers die om de beurt een teken zetten, zeg teken  $X$  voor speler 1 en teken  $O$  voor speler 2, in één van de hokjes waarin nog geen teken staat. De speler die het eerst met zijn teken een hele rij, kolom of een van beide diagonalen heeft gevuld, heeft gewonnen. Als het spel eindigt doordat alle hokjes gevuld zijn zonder dat dat gebeurd is, is het gelijkspel.

#### Kamertje-verhuren

Het spel wordt gespeeld op een rechthoekig stuk ruitjespapier. Twee spelers doen om de beurt een zet, die bestaat uit het verbinden met een streepje van twee direct naast of boven elkaar gelegen punten. Als een speler een vakje

<sup>18</sup>Ook "volledige concurrentie" kan hier nog genoemd worden, maar in dit typoscript zullen we daarop niet nader ingaan en verwijzen ervoor naar literatuur zoals Ichiishi (1983) en de referenties daarin.

<sup>19</sup>Verder bestaat het damspel niet.

<sup>20</sup>Er zijn berichten van archeologen over soortgelijke spelletjes uit Egypte van omstreeks 1300 voor Christus.

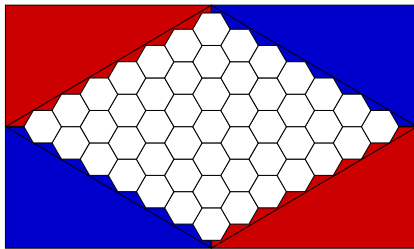
helemaal insluit, dan is het voor hem en mag hij er zijn initiaal inzetten. Daarna moet hij nog een zet doen. Als het bord helemaal vol is, dan heeft degene met de meeste vakjes gewonnen en als beiden evenveel vakjes hebben, dan is het gelijkspel.

### Nim

Gegeven een aantal hoopjes lucifers. Er zijn twee spelers die om de beurt lucifers wegnemen. En wel als volgt. Als een speler aan zet is kiest hij een hoopje uit en neemt daar zoveel lucifers als hij wil, maar tenminste één, uit weg. De speler die als laatste een lucifer wegneemt heeft gewonnen.<sup>21</sup>

### Hex

Net als schaken en dammen is hex een bordspel.<sup>22</sup> Gegeven een ruitvormig bord bestaande uit  $n^2$  hexagonen (i.e. regelmatige zeshoeken), waar  $n \geq 1$  is.<sup>23</sup> Hier is een hex-bord, voor het geval  $n = 7$ :



Elk hokje dat geen randhokje is heeft zes hokjes als buur. Er zijn twee spelers, wit en zwart, die om de beurt een leeg hokje vullen met een steen van eigen kleur. Zo'n gevuld hokje behoort dan tot het territorium van de speler die het vulde. Wit begint. Elke speler heeft twee tegenoverliggende zijden van het bord toegewezen gekregen. Degene die als eerste zijn twee zijden verbonden heeft met een continue keten met stenen van zijn kleur, heeft gewonnen.<sup>24</sup>

Sint-Petersburg-casino Beschouwen we de volgende variant van dit spel waar  $A = 9$  is. Men betaalt een bedrag van  $A$  Roebel. Daarna gooit men met een eerlijke munt net zo vaak totdat het voor de eerste keer kop is. Als dat bij keer  $k$  gebeurt ontvangt men  $2^k$  Roebel.<sup>25</sup>

<sup>21</sup>Op [http://gotofreegames.com/nim/free\\_nim\\_puzzle.htm](http://gotofreegames.com/nim/free_nim_puzzle.htm) kunt U nim tegen een computer spelen. Men gelooft dat het nimspeel uit China komt, maar dat 'nim' afkomstig is van het Duitse "nimm". De publicatie over nim in 1901 van L. Bouton (1868–1902) in de Annals of Mathematics is het eerste artikel dat zich met zogenaamde combinatorische speltheorie bezig houdt. Met name heeft J. Conway tot die theorie bijgedragen.

<sup>22</sup>Dit spel is in 1942 bedacht door Piet Hein, een Deense dichter en wiskundige. Hij speelde het in de badkamer op badkamertegels.

<sup>23</sup>In de praktijk zijn  $n = 10, 11, 14$  populair. En  $n = 1, 2$  is heel erg flauw.

<sup>24</sup>In § 1.7 zullen we zien dat er altijd een winnaar zal zijn, dus dat het spel niet in remise kan eindigen. Met andere woorden: zo'n continue keten zal altijd ontstaan; zie ook hieronder. Op <http://www.mazeworks.com/hex7> is een Java-implementatie van hex te vinden. Daar kunt U hex tegen een computer spelen en is allerlei informatie over dit boeiende spel te vinden.

<sup>25</sup>Deze spelregel bekommert zich niet om het hypothetische geval dat dat nooit gebeurt.

Iet-wiet-waait-is-eer-lijk-weg

Er zijn twee spelers. Speler 1 spreekt de zin “iet-wiet-waait-is-eer-lijk-weg” uit. Daarbij wijst hij bij de eerste lettergreep zichzelf of de andere speler aan en vervolgens bij elke volgende lettergreep de andere speler dan die hij bij de voorafgaande lettergreep aanwees. De speler die bij “weg” aangewezen wordt heeft verloren.

Steen-papier-schaar

Dit is het Amerikaanse (en Spaanse) broertje van het bovenstaande Nederlandse iet-wiet-waait-is-eer-lijk-weg-spel. Er zijn twee spelers. Elke speler heeft de keuze tussen drie gebaren, te weten het maken van een vuist (steen), het geven van een vlakke hand (papier) en het opsteken van wijsvinger en middelvinger (schaar). Belangrijk is dat de spelers tegelijkertijd een gebaar maken zonder van te voren te weten welk gebaar de ander maakt. Daartoe staan de spelers recht tegenover elkaar, maken een vuist en tellen samen tot drie. Bij elke tel schudden de spelers de vuisten en pas bij de laatste tel maakt men een gebaar (i.e. vuist, vlakke hand of opsteken van wijsvinger en middelvinger). Als beide spelers hetzelfde gebaar gekozen hebben, is er nog steeds geen beslissing gevallen en moet het spel opnieuw worden gespeeld. Indien beide spelers niet hetzelfde gebaar maken, wint papier van steen (aangezien papier om de steen kan worden gewikkeld). Tijdens het spel wordt dit duidelijk gemaakt doordat de winnaar zijn vlakke hand over de vuist van de verliezer plaatst. Steen wint van schaar (want de steen slijpt de schaar). Hier strijkt de winnaar zijn vuist langs de opgestoken vingers van de ander. De schaar wint van papier (omdat de schaar het papier knipt). De winnaar knipt daartoe met zijn twee vingers in de hand van de ander.<sup>26</sup>

Russische roulette

Beschouwen we de volgende versie van dit spel voor twee (mannelijke) spelers.

Twee spelers zijn overeengekomen dat slechts een van beide een bepaalde actie mag ondernemen (bijvoorbeeld een dame, die door beiden vereerd wordt, voor een avondje uit vragen). Beiden willen graag die actie uitvoeren, maar kunnen niet tot overeenstemming komen wie de gelukkige zal zijn. Daartoe nemen ze een of andere zes-schieter met één kogel (bijvoorbeeld een revolver waarvan in één der zes kamers een kogel zit). Geen van beiden weet waar die kogel zit. De spelers gaan nu om de beurt een zet doen; met bijvoorbeeld een munt bepalen ze wie beginnen moet. Zo'n zet bestaat uit opgeven (dus de weg vrijmaken voor de ander) of de zes-schieter op het eigen hoofd richten en schieten (met als gevolg de dood als de kogel juist op die plaats zat). Degene die uiteindelijk overblijft mag de actie in kwestie ondernemen.

Gelijke kanten


---

<sup>26</sup>In plaats van het maken van een gebaar zou men ook het spel kunnen spelen door tegelijkertijd een van de woorden “papier”, “steen”, “schaar” uit te spreken.

Er zijn twee spelers. Elke speler heeft een geldstuk met twee kanten, te weten kop en munt, en kiest kop of munt door het geldstuk met de kant die hij kiest op de tafel te leggen met zijn gesloten hand erboven. Daarna neemt men de hand weg en worden de gemaakte keuzen zichtbaar. Als beide kanten gelijk zijn, dan heeft speler 1 gewonnen, anders heeft speler 2 gewonnen. De verliezer betaalt een dubbeltje<sup>27</sup> aan de winnaar.

#### Gevangenendilemma

Een van de mogelijke versies daarvan is de volgende. Twee personen, Wim en Johan, hebben een bank beroofd. Beiden worden gevangen genomen. De officier van justitie kan de beroving echter alleen indirect bewijzen. Daarom verhoort hij beide gevangenen, die sinds hun arrestatie geen contact meer met elkaar hadden, apart en probeert eerst Wim middels een soort van kroogetuigenregeling tot het toegeven van de beroving over te halen. Verder laat hij er geen twijfel aan bestaan dat hij ook Johan hetzelfde voorstel zal doen. Zijn voorstel is het volgende: als ze beiden de daad toegeven, dan worden ze op grond van het indirecte bewijs tot twee jaren cel veroordeeld. Als een van beiden de daad toegeeft en de ander niet, dan wordt degene die toegeeft vrijgesproken en de ander tot vijf jaar cel veroordeeld. Als beiden de daad toegeven, dan worden ze beiden tot vier jaar cel veroordeeld. (Wim denkt nu wellicht als volgt: als ik de daad niet toegeef maar Johan wel, dan krijg ik vijf jaar straf. Het is dus beter dat ik de daad toegeef, dan krijg ik in dat geval een jaar cel minder en bovendien als Johan de daad niet toegeeft, ben ik zelfs vrij. Dus Wim komt tot de conclusie dat het, onafhankelijk van wat Johan doet, het altijd beter is de daad toe te geven. En ook Johan komt op die manier tot die conclusie. Als beiden (vanwege deze redenering) bekennen, gaan ze voor vier jaar de gevangenis in. Maar als ze elkaar zouden vertrouwen en niet bekennen, dan hadden ze slechts twee jaar cel gekregen. Dit alles begrijpende, staan ze voor een moeilijke keuze: een dilemma.)

#### Angsthazen

Twee (heren) zakenmensen van middelbare leeftijd, elkaars rivalen in zekere zin, rijden veel te snel met een auto in tegengestelde richting door een straat die te nauw is om er tegelijkertijd langs te kunnen. Het zakenmens die als eerste afremt (om elkaar de mogelijkheid te geven op een normalere manier te kunnen passeren) verliest zijn zelfachting (anders gezegd is een angsthaas, als U wilt) terwijl de zelfachting van het ander stijgt. Als beide tegelijkertijd afremmen, dan verandert hun zelfachting niet. Als beiden doorrijden, dan heeft dat nogal voor beiden zeer vervelende gevolgen.

#### Gevecht der geslachten

Een pas getrouwd stel op huwelijksreis raakt elkaar in een grote drukke stad kwijt. Tijdens het ontbijt hadden ze al besloten dat ze 's avonds of naar een bokswedstrijd of naar een balletvoorstelling zouden gaan. Elk van beiden

<sup>27</sup>Een dubbeltje is een muntstuk dat aan het einde van het vorige millennium een der Nederlandse muntstukken.



beslist waar 's avonds naar toe te gaan in de hoop elkaar daar te ontmoeten. De voorkeuren van beiden komen overeen met de traditionele stereotypen.

#### Havik-duif

Beschouw een zekere diersoort waarvan de mannetjes vechten om de vrouwtjes. En wel als volgt. Een mannetje dat in conflict komt met een ander mannetje heeft twee mogelijkheden ter beschikking: óf zich gedragen als een havik, dat is vechten totdat hij gewonnen heeft of zwaar gewond is, óf zich als een duif gedragen door een dreiging aan zijn tegenstander kenbaar te maken maar er vandoor te gaan als het tot een gevecht zou komen.

#### Ultimatum

Twee spelers mogen een bepaald bedrag verdelen. Speler 1, de verdeler, doet een voorstel. Speler 2, de ontvanger, mag daarop reageren met ja of nee. Als speler 2 "ja" zegt, vindt de verdeling plaats zoals voorgesteld. Zegt speler 2 "nee", dan krijgen beide spelers niets.

#### Kolonel Blotto

Kolonel Blotto, die  $m$  gevechtseenheden aanvoert, heeft op een dag het oog laten vallen op twee bergpassen  $A$  en  $B$ , welke verdedigd worden door graaf Baloney met  $m - 1$  gevechtseenheden; hier is  $m$  een positief getal dat tenminste gelijk aan 2 is. Elk van de  $2m - 1$  gevechtseenheden is even sterk. In geval een ongelijk aantal ervan tegenover elkaar komen te staan bij een bergpas zal degene met de meeste gevechtseenheden de bergpas veroveren en de eenheden van de tegenstander verslaan. Geen strijd zal geleverd worden als het aantal gevechtseenheden van beide tegenstanders bij die bergpas gelijk is. Beide tegenstanders moeten 's morgens onafhankelijk van elkaar beslissen hoeveel gevechtseenheden ze zullen gebruiken voor elk der bergpassen. Zowel voor Blotto als voor Baloney is elke verslagen gevechtseenheid 1 punt waard. Voor Blotto is elke veroverde bergpas 1 punt waard en voor Baloney is elke verloren bergpas  $-1$  punt waard.

#### Vickrey-veling

Een object wordt verkocht aan een van  $n (\geq 2)$  door het als volgt te veilen. Elke speler  $i$  geeft, (bijvoorbeeld) in een gesloten enveloppe, een bod  $b^i$  aan de veilingmeester. Zij  $v^i$  de waarde van het object voor speler  $i$ . Degene die het hoogste biedt, mag<sup>28</sup> het object kopen voor de op een na hoogste geboden prijs. Dus als  $i$  het hoogst biedt, dan is zijn uitbetaling  $v^i - b^i$  en die van elke andere speler 0.

#### Granaat

Speler 1 zegt tegen speler 2 die 10.000 Euro in zijn portemonnaie heeft: "U geeft me dat geld, zo niet dan breng ik de granaat die ik hier bij me heb tot ontploffing."

---

<sup>28</sup>Beter: lees "moet".

## 1.4 Algemene bekendheid.

In de speltheorie is iets algemeen bekend als iedereen het weet en tevens als iedereen weet dat iedereen het weet en tevens als iedereen weet dat iedereen weet dat iedereen het weet. Enzovoorts (oef!). Het volgende voorbeeld moge een en ander verduidelijken.

In Chicago staat een groep van 100 kabouters met rode en groene mutsen in een kring rondom de kabouterkoning die een bel bij zich heeft. 91 kabouters hebben een rode muts en 9 kabouters hebben een groene. Het is in deze groep algemeen bekend dat iedereen intelligent is en de kabouterkoning gehoorzaamt. Ze communiceren niet met elkaar en elke kabouter kan alleen de mutskleur van alle anderen zien, maar kent de kleur van zijn eigen muts niet. De koning zegt: “Er is hier tenminste één kabouter met een rode muts. Ik zal nu een aantal keren de bel luiden, net zo lang totdat iemand bij het luiden weet dat hij een rode muts heeft en dat kenbaar maakt door naar voren te stappen”. Dan doet hij het aangekondigde. Het spectaculaire nu is dat er een moment komt dat een kabouter naar voren stapt en zelfs dat dat bij de 91-de belluiding plaats vindt en daarbij alle kabouters met rode muts massaal naar voren zullen stappen. (De getallen 100, 91 en 9 doen er niet toe. Hetzelfde resultaat geldt voor positieve gehele getallen  $N$ ,  $M$  en  $N - M$ .)

Inderdaad, als  $M = 1$ , dan ziet de enige kabouter met de rode muts, zeg  $R_1$ , dat alle andere kabouters groene mutsen hebben. Omdat hij weet dat er tenminste één kabouter met een rode muts is kan hij dankzij zijn intelligentie concluderen dat hij het zelf is die een rode muts heeft en hij stapt dus naar voren bij het eerste maal luiden van de bel. Verder kunnen de andere kabouters, die met een groene muts dus, bij de eerste belluiding nog geen conclusie over hun mutskleur trekken: elk van hen ziet 1 kabouter met een rode muts, c'est tout. Opgemerkt zij terzijde het volgende: nadat de kabouter met de rode muts naar voren gestapt is, kan elke andere kabouter concluderen dat hij zelf een groene muts heeft: immers als hij een rode muts zou hebben, dan was  $R_1$  niet voren gestapt omdat deze dan niet had kunnen concluderen dat hij zelf een rode muts had.

Bekijk nu het geval waar  $M = 2$  is. Dan zal bij de eerste belluiding niemand naar voren stappen omdat niemand daarbij kan beredeneren dat hijzelf een rode muts heeft. Wel weet elke kabouter na de eerste belluiding dat er tenminste 2 kabouters met een rode muts zijn. Inderdaad: dankzij hun intelligentie weten ze dat als er slechts één geweest zou zijn, die kabouter weet dat er tenminste één kabouter met een rode muts is en dat hij dankzij zijn intelligentie daarom bij de eerste belluiding naar voren gestapt zou zijn. In het bijzonder weten de twee kabouters met een rode muts, zeg kabouter  $R_1$  en kabouter  $R_2$ , dat er tenminste twee kabouters met een rode muts zijn. Omdat ze elk slecht één kabouter met een rode muts zien, kunnen ze dankzij hun intelligentie concluderen dat ze zelf een rode muts hebben en doen daarom bij de tweede belluiding een stap naar voren. De andere kabouters, i.e. die met de groene mutsen, hebben bij het tweede verzoek nog niet genoeg informatie om een conclusie over hun mutskleur te trekken: elk van hen ziet 2 kabouters met een rode muts, maar weet niet of

hijzelf ook een rode muts heeft. Maar nadat kabouters  $R_1$  en  $R_2$  naar voren gestapt zijn, weten de andere kabouters dat kabouters  $R_1$  en  $R_2$  weten dat er precies twee kabouters met een rode muts zijn. Dus weten zij dat nu ook en kunnen nu voor zichzelf concluderen dat ze een groene muts hebben.

Als  $M = 3$ , dan zal bij de eerste twee verzoeken niemand naar voren stappen omdat niemand daarbij kan beredeneren dat hijzelf een rode muts heeft. Wel weet elke kabouter na het tweede verzoek, dat er tenminste 3 kabouters met een rode muts zijn. Degenen die bij het derde verzoek precies 2 kabouters met een rode muts zien, kunnen concluderen dat ze zelf een rode muts hebben en doen dan een stap naar voren. De andere kabouters hebben weer nog niet genoeg informatie om een conclusie over hun mutskleur te trekken. Ze blijven dus op hun plaats. Etcetera.

## 1.5 Twee typeringen van spelen

Men kan spelen op verschillende manieren abstract typeren. Een manier is aan de hand van hun beoogde reële-wereld-interpretatie. De volgende lijst geeft een poging tot een dergelijke typering, in termen van paren van spelen met tegengestelde interpretaties voor de reële-wereld-karakteristiek in kwestie:

- Spelen waar elke speler rationaal is — Spelen waar spelers niet-rationaal kunnen zijn.
- Spelen waar elke speler intelligent is — Spelen waar spelers niet-intelligent kunnen zijn.
- Coöperatieve spelen — Niet-coöperatieve spelen.<sup>29</sup>
- Spelen met kanszetten — Spelen zonder kanszetten.
- Spelen met communicatie — Spelen zonder communicatie.<sup>30</sup>
- Spelen met volkomen informatie — Spelen met onvolkomen informatie.
- Spelen met volledige informatie — Spelen met onvolledige informatie.
- Statische spelen — Dynamische spelen.
- Spelen met volledige herinnering — Spelen zonder volledige herinnering.
- Spelen met overdraagbare uitbetalingen — Spelen met onoverdraagbare uitbetalingen.
- Geïnterconnecteerde spelen — Geïsoleerde spelen.

---

<sup>29</sup>Coöperatieve spelen heten ook wel spelen met bindende afspraken en niet-coöperatieve spelen ook wel spelen zonder bindende afspraken.

<sup>30</sup>In plaats van “communicatie” spreekt men hier ook wel van “overleg”.

We lichten de betekenis van deze begrippen nu kort toe. Daarvoor zullen we de notie van strategie nodig hebben. Een strategie is een van te voren gestelde gedragslijn waarin een speler vastlegt hoe hij denkt te reageren in iedere denkbare omstandigheid die zich in het gehele verloop van het spel kan voordoen. In geval voor elk der spelers een strategie gegeven is, noemt men het geheel van die strategieën een multi-strategie.<sup>31</sup> Voor het moment is het voldoende<sup>32</sup> bij een strategie van een speler aan een volledig uitgewerkt speelplan van die speler te denken. Zo'n plan kan men zich (in principe) als volgt voorstellen : als elke speler heet op een briefje<sup>33</sup> uitschrijft en dat aan een scheidsrechter geeft, dan kan de scheidsrechter daarmee het spel spelen kan en zo de uitbetalingen bepalen.

#### *Rationaliteit.*

Rationaliteit behelst een eigenschap van een speler. Het zij gezegd dat rationaliteit een vaag begrip is en moeilijk te formaliseren is. Hier is een poging: een rationale speler is een speler die welgedefinieerde voorkeuren voor de mogelijke uitkomsten van zijn keuzegedrag heeft en er voldaan is aan een consistentieconditie voor de keuzen die de speler maakt om een zo goed mogelijke uitkomst te bereiken.<sup>34</sup> In geval van één speler waar elke keuze tot een zekere uitkomst leidt, is die conditie dat de speler zijn nut maximaliseert; Als er echter kwantificeerbare onzekerheid is neemt men meestal voor die conditie dat de beslisser zijn verwachte nut probeert te maximaliseren. Voor deze context gaat de notie van rationele beslisser minstens terug tot Bernoulli (1738), maar de moderne rechtvaardiging daarvan werd gegeven door von Neumann & Morgenstern (1953) met hun beroemde stelling van de maximalisering van het verwachte nut.<sup>35</sup>

Zo gauw men met meer dan één beslisser te maken heeft, wordt, afhankelijk van de specifieke situatie, het geven van een goede definitie van rationaliteit extra problematisch. Een probleem is dat de beslisser de waarde van de uitbetaling doorgaans niet in eigen handen heeft omdat ook het gedrag van de andere beslissers van invloed daarop is. Een ander probleem betreft de veronderstellingen van een speler over het gedrag van de andere spelers.

De veronderstelling dat spelers rationeel zijn is doorgaans niet realistisch.<sup>36</sup> Redenen waarom men toch vaak veronderstelt dat men met dergelijke spelers te maken heeft (zoals in de definitie van traditionele speltheorie), zijn dat het

---

<sup>31</sup>Synoniem strategieprofiel.

<sup>32</sup>In § 3.2 komen we er preciezer op terug.

<sup>33</sup>Of misschien wel op een dik pak papier als hij zoveel ruimte nodig heeft.

<sup>34</sup>Het is aardig op te merken dat bij het beschrijven van menselijk gedrag, in tegenstelling tot dat van natuurlijke verschijnselen, de operaties "max" (of "min") vaak gebruikt worden.

<sup>35</sup>Merken we nog op dat ook in de neoklassieke micro-economie men uitgaat van de rationaliteit van de beslissers. Daar zijn dat consumenten die hun nut maximaliseren en producenten die hun winst maximaliseren. Het is niet voor niks dat speltheorie en neoklassieke micro-economie vriendjes van elkaar zijn.

<sup>36</sup>Menig Ruslandkenner vindt dat het Russische volk veel minder rationeel is dan dat in West-Europa en de Verenigde Staten van Amerikika. In die zin is speltheorie wellicht geschikter om reële-wereld-problemen in West-Europa dan in Rusland mee te analyseren.

Ook interessant is de opmerking van sommigen dat vooral de mens (en andere levensvormen op onze aarde in veel mindere mate) in staat lijkt tot het nemen van irrationele beslissingen.

niet zo is dat spelers altijd irrationeel handelen, dat het anders te ingewikkeld zou worden, dat om de theorie voor irrationele spelers te kunnen begrijpen men eerst die voor rationele spelers moet begrijpen en dat theorieën die niet van rationele spelers uitgaan op de duur hun waarde voor de reële wereld wel eens kan verliezen doordat spelers die niet rationeel zijn door degenen die dat wel zijn verdrongen zullen worden.<sup>37</sup>

*Intelligentie.*

Grip krijgen op de notie van intelligentie is ook moeilijk. Aan dit begrip gaat vooraf wat het doel van de speler is, i. zijn rationaliteitsdoelstelling. Hier is een poging: een speler van een spel is intelligent als hij alle berekeningen aankan (bijvoorbeeld allerlei optimaliseringsproblemen en logische redeneringen) die hij in verband met het spel in kwestie en zijn rationaliteitsdoelstelling zou willen maken. Intelligentie heeft te maken met de manier waarop het gestelde doel nagestreefd wordt. Een speler kan best intelligent in het ene, maar niet in een ander spel zijn.

Merk goed op dat de begrippen “intelligentie” en “rationeel” verschillende kwaliteiten van de spelers betreffen.<sup>38</sup> In principe is het heel goed mogelijk dat een beslisser rationeel maar niet intelligent is of dat hij niet rationeel maar wel intelligent is. Interessant wordt het voor de speltheorie dus als een speler over beide kwaliteiten beschikt. Zo’n speler zal dan intelligent rationeel strategisch gedrag vertonen.

We merken op dat er weinig of geen verband tussen rationaliteit, intelligentie en goedheid bestaat.<sup>39</sup>

*Kanszetten.*

Er zijn spelen waar de spelers zelf “alles in handen hebben” en waar dat niet zo is. Het laatste geval doet zich veelal voor als er dobbelstenen in een spel gebruikt worden. Zo is bijvoorbeeld mensch-erger-Je-niet een spel met kanszetten. In spelen waar de spelers alles zelf in handen hebben, leidt een strategie van een speler tot een resultaat dat zeker is. Als er echter met een dobbelsteen gegooid wordt, dan zijn de resultaten van strategieën doorgaans onzeker. Maar in geval van een eerlijke dobbelsteen valt er wel te kwantificeren in de zin dat er over kansen gesproken kan worden.

*Volkomen en volledige informatie.*

Men zegt dat een speler volkomen informatie heeft als hij op elk moment van het spel waar hij aan zet is weet wat het spelverloop (i.e. de zetten) tot dan toe is geweest. Het is hierbij toegestaan dat er kanszetten voor die speler zijn geweest. Volkomen informatie mag men daarom niet identificeren met geen onzekerheid. Maar volkomen informatie houdt niet dingen in als dat de speler

<sup>37</sup>Merken we nog op dat Simon (in 1960) de notie van *begrensde rationaliteit* in de economie ingevoerd heeft (nadat Freud en Jung iets dergelijks al veel eerder in de psychologische wetenschap deden).

<sup>38</sup>Wellicht is de mens het meest intelligente maar ook het meest irrationele wezen op aarde.

<sup>39</sup>Psychopaten gaan doorgaans zeer intelligent te werk.

de gedachten van andere spelers zou kunnen lezen, of dat hij weet hoe het zit met de rationaliteit en intelligentie van de andere spelers. Een spel waar elke speler volkomen informatie heeft, heet een spel met volkomen informatie. Men zegt dat een speler onvolkomen informatie heeft indien hij geen volkomen informatie heeft. Een spel met geen volkomen informatie heet een spel met onvolkomen informatie.<sup>40</sup>

Dus mensch-erger-Je-niet is een spel met volkomen informatie, zij het met kanszetten; een eerlijke dobbelsteen daar verpest de eigenschap van volkomen informatie niet. Het schaakspel is een typisch spel met volkomen informatie. Russische roulette, monopolie en menig kaartspel is een spel met onvolkomen informatie. Dat monopolie een spel met onvolkomen informatie is, komt door de stapeltjes van kaarten daar waarvan de spelers niet weten hoe de kaarten daarin geordend liggen. Een belangrijke oorzaak van onvolkomen informatie is er in spelen waar spelers tegelijkertijd zetten: indedaad op het moment dat een speler zet, weet hij niet wat de andere zet.

Naast de notie van (on)volkomen informatie<sup>41</sup> is er die van (on)volledige informatie.<sup>42</sup> Men moet die noties goed van elkaar onderscheiden. Men zegt dat een spel met onvolledige informatie is, als er een speler is die niet de mogelijke uitbetaling (beter gezegd uitbetalingsfuncties) van elke speler kent. Een voorbeeld zijn veilingen; daar immers weet een bieder doorgaans niet wat de waarde van het te veilen object voor de andere bidders is.

De meeste spelen, zoals economische, die pretenderen een niet al te onrealistische reële-wereld-interpretatie te hebben, zouden spelen met onvolledige informatie moeten zijn. Toch neemt men vaak aan dat er volledige informatie is om een en ander niet al te moeilijk te maken. De theorie van spelen met onvolledige informatie is moeilijk! Mede daarom zijn alle spelen die we in dit typoscript verder zullen bekijken, spelen met volledige informatie.<sup>43</sup>

### *Coöperatie en communicatie.*

Typisch voor coöperatieve spelen is dat er bindende afspraken zijn. Bindende afspraken kunnen van tweeërlei aard zijn: coördinering van strategieën of (als dat mogelijk is) verdelen van uitbetalingen. De aannames van het zich houden aan de gemaakte afspraken kan gemotiveerd worden door te verwijzen naar het bestaan van een rechtssysteem en naar het feit dat men zijn reputatie niet wil verliezen. Hoe dan ook, men kan vele vraagtekens bij deze aannames plaatsen. Binnen niet-coöperatieve spelen zijn bindende afspraken alleen mogelijk als dat expliciet in de spelregels opgenomen is.<sup>44</sup> Bij een coöperatief spel treedt een

<sup>40</sup>Dat is dus een spel waar tenminste één speler onvolkomen informatie heeft.

<sup>41</sup>In het Engels "(im)perfect information".

<sup>42</sup>In het Engels "(in)complete information".

<sup>43</sup>Harsanyi heeft laten zien hoe (door introductie van fictieve loterijen) spelen met onvolledige informatie omgezet kunnen worden in spelen met volledige informatie waar de speler Natuur als eerste zet en hoe deze dan verder geanalyseerd kunnen worden. Ook daarom is het goed eerst vertrouwd te raken met de theorie van de spelen met volledige informatie.

<sup>44</sup>Nogal wat speltheoretici geloven niet zo in de waarde van coöperatieve speltheorie. Op een bijeenkomst aan de K.U.B. in Tilburg op 3 april 1998 zei Nash *himsel* dat er voor coöperatieve spelen niet echt een oplossingsconcept is van het kaliber van het nash-evenwicht

speciaal verschijnsel op: coalitievorming. Coalitievorming treedt nogal graag op in spelen met veel spelers; maar of dat daadwerkelijk zo is, hangt van het concrete spel af en van wat men precies met "coalitievorming" bedoelt.

Het ligt voor de hand dat een spel met bindende afspraken ook een spel met communicatie is, maar die communicatie wordt vaak niet expliciet gemodelleerd. Vermelden we ook de notie van voorspelcommunicatie: voordat het spel begint, kunnen de spelers met elkaar communiceren (en zo gauw het spel begonnen is, niet meer).

*Overdraagbare uitbetalingen.*

Indien de uitbetalingen in een spel geld voorstellen dan zijn de uitbetalingen van de ene speler op de andere overdraagbaar. Maar ook uitbetalingen in termen van "nut" komt men vaak tegen; dan spreekt men veelal van "nut" in plaats van uitbetaling. Geld is van de ene speler op de andere speler overdraagbaar, maar bij nut kan dat eigenlijk niet zomaar.<sup>45</sup> Economisten spreken in plaats van overdraagbare uitbetalingen meestal van zijdelingse betalingen.<sup>46</sup>

*Dynamica en herinnering.*

Bij menig reële-wereld-probleem speelt tijd een rol. Zo zijn samenwerking, dreiging, vergelding, herinnering en leren dingen die altijd met tijd te maken hebben (maar niet per se met communicatie). In statische spelen speelt de tijd geen expliciete rol in tegenstelling tot in dynamische. Dynamische spelen kunnen verder geclassificeerd worden. Zo zijn er discrete tijd dynamische spelen, waar de tijd discreet verloopt (in perioden) en continue tijd dynamische spelen waar de tijd continu verloopt. Ook kunnen ze geclassificeerd worden middels het criterium of ze al of niet zogenaamde structurele tijdsafhankelijkheid toelaten en middels het criterium of de tijdshorizon eindig of oneindig is. Differentiespelen zijn een voorbeeld van discrete tijd dynamische spelen die met structurele tijdsafhankelijkheid rekening kunnen houden; differentiaalspelen zijn een voorbeeld van continue tijd dynamische spelen die met structurele tijdsafhankelijkheid rekening kunnen houden.

Men spreekt van structurele tijdsafhankelijkheid indien de uitbetalingen niet alleen afhangen van de momentele acties maar ook nog eens van alles wat in het verleden gebeurd is.<sup>47</sup>

*Interconnectie.*

Het komt voor dat spelers betrokken zijn bij verschillende spelen. Het kan dan uitmaken of men die spelen afzonderlijk analyseert (met geïsoleerde spelen) of dat men dat doet met één groot spel (geïnterconnecteerd spel).

---

voor niet-coöperatieve spelen. (Voor coöperatieve speltypen bestaat er een "oerwoud" van oplossingsconcepten.) Dit ziet hij als een van de uitdagende problemen in de speltheorie.

<sup>45</sup>Gevangenisstraf (i.e. de aard van de uitbetalingen in het gevangenendilemma) is een voorbeeld van een uitbetaling die niet te delen is.

<sup>46</sup>"Omkopen" zou ook nog niet zo'n gek woord voor sommige van dat soort van handelingen kunnen zijn.

<sup>47</sup>Sommigen spreken slechts in het geval er structurele tijdsafhankelijk is van (echte) dynamische modellen. De structurele tijdsafhankelijkheid wordt veelal gemodelleerd door middel van zogenaamde toestandsvariabelen.

Tot zover deze typering. Von Neumann en Morgenstern volgend is een andere mogelijke abstracte typering die waarbij men let op de mathematische structuur, te weten:

- spelen in uitgebreide vorm;
- spelen in strategische vorm;
- spelen in karakteristieke functievorm.

Laten we deze even kort bekijken. Een spel in strategische vorm met  $n$  spelers is als mathematisch object snel gegeven: het is een afbeelding  $\mathbf{f} : X^1 \times \dots \times X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . De verzameling  $X^i$  heet strategieverzameling van speler  $i$  en de componentfunctie  $f^i : X^1 \times \dots \times X^n \rightarrow \mathbb{R}$  heet uitbetalingsfunctie van speler  $i$ . Als elke speler  $i$  een strategie  $x^i$  gekozen heeft dan is  $f^i(x^1, \dots, x^n)$  te interpreteren als de uitbetaling aan speler  $i$ . Er zijn tal van reële-wereld-problemen die van als spel in strategische vorm gemodelleerd worden. Het cournot-oligopolie (zie § 4.1) is een voorbeeld daarvan.<sup>48</sup>

Een belangrijk speciaal geval van een spel in strategische vorm vormen de bi-matrix-spelen. Een bi-matrix-spel wordt gespeeld door twee spelers. Het spel wordt gegeven door een bi-matrix, i.e. een (eindige) matrix waar op elke plaats twee getallen staan, gescheiden door een punt-komma. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 0;0 & -1;1 & 1;-1 \\ 1;-1 & 0;0 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 & 0;0 \end{pmatrix}.$$

Speler 1 kiest een rij en speler 2 een kolom zonder dat de een ziet wat de ander kiest; speler 1 heet daarom ook wel de rijspeler en speler 2 de kolomspeler. Nadat ze gekozen hebben, zeg speler 1 rij  $i$  en speler 2 kolom  $j$  staan op plaats  $ij$  van de bi-matrix de uitbetalingen aan de spelers; en wel het eerste getal is de uitbetaling aan speler 1 en het tweede de uitbetaling aan speler 2. Een bi-matrix-spel doet wat gek aan. Dat komt omdat het meer een abstract speltype is dan zoiets concreets als een gezelschapsspel. Echter diverse concrete spelen zijn direct te modelleren middels bi-matrices. Bijvoorbeeld door bij steen-papier-schaar ‘steen’ als eerste strategie, ‘papier’ als tweede en ‘schaar’ als derde te nemen, kan dit middels de hierboven gegeven bi-matrix. Het gelijke kanten spel is middels het bi-matrix-spel

$$\begin{pmatrix} -1;1 & 1;-1 \\ 1;-1 & -1;1 \end{pmatrix}$$

te modelleren (strategie 1 is kop en strategie 2 is munt). Het gevangenendilemma middels het bi-matrix-spel

$$\begin{pmatrix} 5;5 & -4;6 \\ 6;-4 & -3;-3 \end{pmatrix}$$

<sup>48</sup>Het Cournot-evenwicht was eigenlijk het eerste voorbeeld van een nash-evenwicht. Von Stackelberg anticeerde in zijn von-stackelberg-duopolie-model als eerste al op het deelspel-perfecte nash-evenwicht.



(strategie 1 is “niet bekennen” en strategie 2 is “bekennen”). Kip als het bi-matrix-spel

$$\begin{pmatrix} 0;0 & 0;1 \\ 1;0 & -1;-1 \end{pmatrix}$$

(strategie 1 is afremmen en strategie 2 is doorrijden). Het gevecht der geslachten als

$$\begin{pmatrix} 2;1 & 0;0 \\ 0;0 & 1;2 \end{pmatrix}$$

(man is rijspeler en vrouw is kolomspeler, strategie 1 staat voor “bokswedstrijd” en strategie 2 voor “balletvoorstelling”). En havik-duif als het bi-matrix-spel

$$\begin{pmatrix} -5;-5 & 10;0 \\ 0;10 & 4;4 \end{pmatrix}$$

(strategie 1 is zich gedragen als een havik en strategie 2 is zich gedragen als een duif).

Maar ook een schaakspel bijvoorbeeld geeft (omdat elke speler er eindig veel strategieën heeft) na normalisatie (zie hieronder) een (gigantisch grote) bi-matrix.

Een spel in strategische vorm is dus als mathematisch object best eenvoudig. Veel moeilijker is het een mathematisch object te geven voor de notie van spel in uitgebreide vorm: het is een bepaald soort graaf waaraan diverse “toeters en bellen” hangen. Vooral onder spelen in uitgebreide vorm zijn er die tot de verbeelding spreken: het gaat er onder meer om gezelschapsspelen. Onder een spel in uitgebreide vorm moge men zich in dat verband een reëel-wereldgebeuren voorstellen waar een aantal spelers om de beurt een zet doen (i.e. een beslissing nemen). Eerst doet bijvoorbeeld Jan een zet, daarna Heinrich, daarna weer Jan, vervolgens weer Jan, dan Zemfira en tenslotte Heinrich en is het spel afgelopen. (In geval van volkomen informatie worden de zetten door alle spelers geobserveerd.) Wie wanneer zet hangt van de spelregels en het spelverloop af. Door het doen van zetten gaat het spel van de ene positie in de andere over. Hoe een speler zet, wordt door zijn strategie bepaald. Nadat het spel afgelopen is vinden de uitbetalingen plaats. Voorbeelden van spelen in uitgebreide vorm zijn boter-kaas-en-eieren, schaken en nim.

Om een niet-coöperatief spel in uitgebreide vorm te analyseren kan het verstandig zijn het spel om te zetten in een spel in strategische vorm. Hierbij spreekt men dan nog van normalisatie en men noemt de omzetting vaak de normale vorm van het oorspronkelijke spel. Deze omzetting gaat in zijn werk door voor zo'n spel onder “strategie” van een speler een volledig uitgewerkt speelplan te verstaan. De uitgebreide vorm behelst meer details van het spelgebeuren dan zijn normale vorm.

Ook de definitie van een spel in karakteristieke functievorm met  $nN$  spelers is in een handomdraai te geven: het is een functie  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  met  $v(\emptyset) = 0$ , waar  $\mathcal{C}$  de verzameling van alle deelverzamelingen van de verzameling  $\{1, \dots, n\}$  aan duidt. De elementen van  $\mathcal{C}$  heten coalities,  $v$  heet de karakteristieke functie en  $v(S)$  de waarde van de coalitie  $S$ . Spelen in karakteristieke functievorm worden

gebruikt om coöperatief gedrag mee te modelleren. Ze behoren in die hoedanigheid tot de klasse der coöperatieve spelen. Het idee is dat als lid van een coalitie  $S$  een speler  $i \in S$  zijn gedrag gaat veranderen in de zin dat zo'n speler zal samenwerken met de spelers van  $S$ , door bindende afspraken te maken, maar niet met die van spelers die niet tot  $S$  behoren. Voor het begrip kan het goed zijn om aan  $v(S)$  de volgende algemene reële wereld interpretatie te koppelen:  $v(S)$  is een maat voor de macht van de coalitie  $S$ . En, nog concreter, indien het over de verdeling van een deelbaar goed (bijvoorbeeld geld) gaat, is  $v(S)$  de hoeveelheid van dat goed dat  $S$  kan bereiken door samenwerken (onafhankelijk wat de spelers doen die niet tot  $S$  behoren). In de theorie veronderstelt men verder vaak dat we met een deelbaar goed te maken hebben en daarmee dat zijdelingse betalingen mogelijk zijn (i.e. dat het nut overdraagbaar is). Spelen in karakteristieke functievorm behelzen doorgaans nog weinig details van het reële-wereld-gebeuren. Ook zijn er nog omzettingen mogelijk van een spel in strategische vorm (met bindende afspraken) naar een spel in karakteristieke functievorm. De normale vorm van een spel in uitgebreide vorm met twee spelers waarbij het remise is, of één van de spelers wint, kan doorgaans gemodelleerd worden als een nulsomspel. Dat is een spel waar de som van de uitbetalingen der spelers steeds nul is. (Nulsomspelen treden op bij de modellering van diverse pure conflictsituaties omdat bij dit soort spelen bij wijze van spreken “de een zijn brood de ander zijn dood is”.)

De drie gegeven abstracte speltypen zijn elk in meer of mindere mate geschikt om rekening te houden met specifieke karakteristieken van reële-wereld-problemen. In feite zou men nog andere abstracte speltypen met wat meer structuur kunnen onderscheiden. We noemen hier

- Spelen met meerdere doelstellingen.
- Herhaalde spelen.
- Stochastische spelen.

Bij een stochastisch spel bepalen de strategieën die de spelers kiezen de spelafloop slechts met een kans.

Laten we nu even pogen (en niet meer dan dat) om de abstracte speltypen te confronteren met de reële-wereld-speltypen. Spelen in uitgebreide vorm zijn niet-coöperatief en zowel compatibel met volkomen als met onvolkomen informatie, met statische als met dynamische spelen. Spelen in strategische vorm zijn incompatibel met bindende afspraken en met volkomen informatie. Spelen in strategische vorm vormen de peilers van de niet-coöperatieve speltheorie. Bij spelen in karakteristieke functievorm zijn er bindende afspraken en is er volledige en volkomen informatie. Men kan ze nog verdelen in spelen met en zonder overdraagbare uitbetalingen.

Een nadeel van statische modellen over menselijk gedrag (bijvoorbeeld met spelen in strategische vorm) is dat ze niet zo geschikt zijn om samenwerkingsaspecten mee te modelleren.<sup>49</sup> Dat geldt met name voor zogenaamde *one shot*

<sup>49</sup>Men onderscheidt drie fundamentele manieren van samenwerking: door wetten, door directe overeenstemming en door middel van decentralisatie.

spelen: spelen die maar één keer gespeeld worden. Dreiging, vergelding en leerprocessen kunnen daar moeilijk een rol spelen, omdat deze eenmaal een intertemporeel karakter hebben. Maar van de andere kant kunnen *one-shot* spelen best interessant zijn omdat veel spelen slechts een keer gespeeld worden. Herhaalde spelen vormen de meest simpele manier om tijd in spelen in strategische vorm in te bakken. (Een herhaald spel is op natuurlijke wijze een spel in strategische vorm, maar heeft meer structuur.) Tekortkomingen van modellen met herhaalde spelen kunnen zijn dat ze slechts met één doelstelling overweg kunnen en dat ze geen rekening kunnen houden met structurele tijdsafhankelijkheid. Spelen met meerdere doelstellingen kunnen zoals de naam zegt rekening houden met meerdere doelstellingen, maar hebben een statisch karakter, hetgeen voor diverse (economische) problemen een serieuze beperking kan zijn. Ze zijn echter direct te generaliseren in die context. Zo zijn er bijvoorbeeld herhaalde spelen met meerdere doelstellingen. Dit type van spelen combineert de intertemporele structuur met die van meerdere doelstellingen. Mathematisch gezien is het mogelijk om een afweging aan te brengen in een spel met meerdere doelstellingen. Als het spel voorzien is van een reële-wereld-interpretatie kan het moeilijk worden om aan de afgewogen uitbetalingsfuncties een reële-wereld-interpretatie toe te kennen. Bedenk immers dat de afzonderlijke uitbetalingen in een vectoruitbetaling bijvoorbeeld geld, punten en graden kunnen voorstellen, dat zijn dingen die men niet zo maar bij elkaar op kan tellen.

## 1.6 Oplossingsconcepten

Speltheorie is bij machte om interessante uitspraken te doen over wat zal gebeuren in reële-wereld-situaties zoals die uit § 1.3. Maar dan moet het wel duidelijk zijn hoe het zit met de reële-wereld-karakteristieken bij die situaties gesteld is. Bijvoorbeeld hoe het zit met de rationaliteit en intelligente van de spelers. Omdat we ons met traditionele speltheorie bezighouden zullen we vanaf nu steeds veronderstellen dat we te maken hebben met rationele en intelligente spelers en dat er geen bindende afspraken zijn. We zullen wat minder expliciet zijn over hoe het met de andere karakteristieken gesteld is, maar gaan er wel steeds van uit dat bindende afspraken niet voorkomen. Dat maakt dat we ons alleen nog maar (tenzij anders vermeld) met niet-coöperatieve speltheorie bezig houden.

De meest sterke uitspraken over hoe een spel gespeeld wordt, behelst spelen met een waarde: men zegt dat een spel een waarde heeft als de uitkomst van het spel (verkregen doordat rationele intelligente spelers het spel spelen) steeds dezelfde is. In zekere zin zou men een spel met een waarde “flauw” kunnen noemen omdat het voor rationele intelligente spelers van te voren vaststaat wat de uitkomst van het spel zal zijn en er aan zoiets doorgaans geen pret te beleven valt. Een voorbeeld van een spel met een waarde is boter-kaas-en-eieren. Dat spel heeft remise als waarde, Dat dit zo is, ontdekt men wellicht snel als men het spel meerdere keren speelt. Maar formeel bewijzen dat dat zo is, is natuurlijk iets anders. Met speltheorie kan men bewijzen dat elk eindig strikt competitief spel met volkomen en volledige informatie (zoals boter-kaas-en-eieren) een waarde

heeft (zie § 3.7).<sup>50</sup> Dit fundamentele resultaat impliceert dat ook elk nimspeel en hexspeel een waarde hebben, en nog verrassende dat het schaakspel en het damspel een waarde hebben.

Gegeven een spel met een waarde, verstaat men onder een optimale strategie van een speler, een strategie die die speler tenminste de waarde van het spel als uitkomst garandeert. Beschouw ter illustratie van de notie van optimale strategie weer boter-kaas-en-eieren. Een optimale strategie hier garandeert dus tenminste remise. Beschouw de volgende strategie van speler 2: als speler 1 hokje met nummer  $x$  vult, dan vul ik hokje met nummer de rest van  $x + 5$  gedeeld door 9 plus 1. (Men nummere de hokjes met 1 tot en met 9, beginnende linksboven met een 1 en verder nummerend van links naar rechts en van boven naar beneden.) Deze strategie is niet optimaal, immers als de eerste zet van speler 1 het vullen van hokje 1 is, dan is de eerste zet van speler 2 het vullen van hokje 6 en kan speler 1 winnen (door hokje 7 te vullen).

In feite hebben we:

	b-k-e	nim	hex	schaken	Amerikaans dammen
waarde	remise	1 of 2	1	niet bek.	remise
opt. strat.	bekend	bekend	niet bek.	niet bek.	bekend

Opmerkingen: Of er een 1 of 2 bij de waarde van nim staat is afhankelijk van de configuratie. En voor niet al te grootte borden (momenteel tot  $9 \times 9$ ) is een optimale strategie van hex wel bekend. De optimale strategie voor b-k-e is bekend maar niet een-twee-drie hier op te schrijven. Verder betreft "Amerikaans dammen" de variant van het damspel op een  $8 \times 8$ -bord. Dat de waarde remise is, is in 2007 met behulp van honderden computers die 18 jaar rekenden, aangetoond. Dat is een zeer spectaculair resultaat, zeker als we bedenken dat dat spel  $\pm 5 \cdot 10^{20}$  mogelijke posities heeft. Schaken heeft  $\pm 10^{45}$  mogelijke posities en is daarmee veel complexer (net als het damspel op een  $10 \times 10$  bord overigens). Een benedengrens voor het aantal mogelijke manieren dat een schaakspel gespeeld kan worden is  $10^{120}$ ; dit getal staat bekend als het getal van Shannon, en is groter dan de schatting  $10^{80}$  van het aantal atomen in het observeerbare deel van het universum. Er is enige hoop dat de waarde van schaken ooit berekend kan worden met (toekomstige) quantum-computers.<sup>51</sup>

Niet alle spelen hebben een waarde en voor spelen met een waarde kunnen optimale strategieën onbekend zijn. Een vraag aan een speltheoret hoe een spel dat geen waarde heeft te spelen kan dan best wel eens te veel gevraagd zijn. Als dat zo is, bijvoorbeeld bij formele grensoverschrijdende vervuilingsspeel, en de speltheoret toch quasi verplicht wordt om iets zinnigs over het spel te zeggen, kan hij, zij het met wat durf, voorspellingen geven hoe het spel misschien wel gespeeld zal worden.<sup>52</sup> Speltheoreten spreken in plaats van "aanbevelingen" liever van oplossingsconcepten. Een oplossingsconcept voor een spel kan gezien

<sup>50</sup>Een andere vraag is wát die waarde is.

<sup>51</sup>Opgemerkt zij nog dat hoewel sterke schaakprogramma's in staat zijn de beste schakers te verslaan, de beste goprogramma's het vaak tegen vaardige kinderen afleggen.

<sup>52</sup>Maar hij acht zich er niet zo verantwoordelijk voor als het spel toch anders gespeeld wordt.

worden als een regel die specificceert hoe spelers dat spel zullen spelen. Helaas is er geen universeel oplossingsconcept dat op elk spel toepasbaar is: bij verschillende typen van spelen horen verschillende oplossingsconcepten.<sup>53</sup> Het is mooi meegenomen als een oplossingsconcept voor een spel aan dat spel precies één oplossing toevoegt. Als dat niet zo is, dan zijn doorgaans verdere verfijningen gewenst die bepaalde oplossingen uitsluiten.

Bekijken we nu even belangrijke oplossingsconcepten voor spelen in strategische vorm. Een strikt dominante strategie van een speler is een strategie die altijd de beste is, onafhankelijk van wat de andere spelers doen. Als elke speler een strikt dominante strategie heeft, dan heet de bijhorende multi-strategie een strikt dominant evenwicht. In zo'n geval is het redelijk om een strikt dominant evenwicht als oplossingsconcept te nemen.

Een voorbeeld van een spel met een strikt dominant evenwicht is het gevangenendilemmaspel uit § 1.3. Bekennen is daar een strikt dominante strategie voor elke speler. Het dilemma hier is dat niet bekennen voor beide spelers tot een grotere uitbetaling leidt. Anders gezegd: de multi-strategie waar beide spelers bekennen is zwak pareto-inefficiënt.<sup>54</sup> De notie van pareto-efficiëntie is zeer belangrijk. We onderscheiden er twee: een multi-strategie  $\mathbf{x}$  heet (sterk) pareto-efficiënt als er geen andere multi-strategie  $\mathbf{z}$  bestaat waarvoor de uitbetaling aan elke speler niet lager is dan in  $\mathbf{x}$  en de uitbetaling van tenminste één speler hoger is dan in  $\mathbf{x}$ . En een multi-strategie  $\mathbf{x}$  heet zwak pareto-efficiënt indien er geen andere multi-strategie bestaat waarvoor de uitbetaling aan elke speler hoger is dan in  $\mathbf{x}$ . Men zou deze noties, iets minder precies, ook als volgt kunnen verwoorden: een sterk pareto-efficiënte multi-strategie is niet verbeterbaar en een zwak pareto-efficiënte multi-strategie is niet voor iedereen verbeterbaar. Een willekeurig spel in strategische vorm heet een gevangenendilemmaspel als elke speler een strikt dominante strategie heeft en het strikt dominante evenwicht zwak pareto-inefficiënt is.<sup>55</sup>

---

<sup>53</sup>Ook dient dus, zoals gezegd, rekening gehouden te worden met de reële-wereld-karakteristieken. Op het belang van deze voor de oplossingsconcepten gaan we niet in. Dit zou veel te ver voeren. Er valt bijvoorbeeld heel wat te zeggen over het belang van algemene bekendheid voor de rechtvaardiging van het nashevenwichtoplossingsconcept.

<sup>54</sup>Vilfredo Pareto (1848-1923), Italiaan, ingenieur, econoom en socioloog. Hij werd in Parijs geboren in een aristocratische Italiaanse familie. Ongeveer tien jaar later keerde de familie terug naar Italië. Hij bezat voor een econoom zeer goede wiskundige vaardigheden. Werkte meer dan 20 jaar als ingenieur en directeur bij twee Italiaanse spoorwegmaatschappijen. Hield zich pas op later leeftijd met economie bezig. Hij kwam daartoe na Walras bestudeerd te hebben en die vervolgens ontmoet te hebben. Volgde Walras in Lausanne als professor op. Raakte uiteindelijk gedesillusioneerd in de economie en ging zich daarna naar eigen zeggen in de sociologie verdiepen om te onderzoeken waarom de aanbevelingen van economen niet uitgevoerd worden. Hij had ook grote verdiensten in de economische methodologie. Het onderscheid tussen kardinaal en ordinaal nut komt van hem en Fisher af. Zijn geschriften zijn moeilijk te lezen.

<sup>55</sup>Het originele gevangenendilemmaspel is bedacht door Dresher en Flood. Tucker bedacht later de interpretatie met gevangenenen erbij.

Het zij hier nog gezegd dat de notie van "gevangenendilemma" wordt in de sociale wetenschappen nogal eens te onpas gebruikt. We zullen in § 2.2 zien dat een gevangenendilemmaspel een spel is waar elke speler een strikt dominante strategie heeft en het bijbehorende strikt dominante evenwicht niet zwak pareto-efficiënt is.

Strikt dominante evenwichten zijn bijzonder omdat lang niet alle spelen in strategische vorm een strikt dominant evenwicht hebben. Andere oplossingsconcepten, zoals dat van nash-evenwicht, kan dan uitkomst bieden. Kort gezegd behelst een nash-evenwicht voor een spel in strategische vorm een strategiekeuze van elke speler, i.e. een strategie voor elke speler  $i$ , die zodanig is dat geen der spelers genegen is om als enige zijn keuze te vervangen door een andere. Nog anders gezegd: een nash-evenwicht is een multi-strategie waar geen der spelers zijn eigen strategie betreurt. Een strikt dominant evenwicht is een speciaal geval van een nash-evenwicht.

De notie van nash-evenwicht is misschien wel de belangrijkste in dit typoscript. De notie van nash-evenwicht is ook compatibel met kanszetten. Het gaat dan om de notie van nash-evenwicht in gemengde strategieën. Een gemengde strategie (van een speler) is een kansdichtheid op de verzameling der (zuivere) strategieën. In plaats met zekerheid voor een van de mogelijke strategieën te kiezen, kan een speler ervoor kiezen om een der strategieën te gaan kiezen middels een bepaalde kansdichtheid. Omdat een speler (lees "mens") dit zonder hulpmiddelen moeilijk voor elkaar kunnen krijgen, kan hij gebruik maken van een apparaat dat dat voor hem doet: bijvoorbeeld van een dobbelsteen indien hij wil kiezen uit 3 strategieën, waarvan een strategie met kans  $2/3$  en twee strategieën met kans  $1/6$ . Als elke speler voor het spelen van een gemengde strategie kiest, dan is het doorgaans de bedoeling dat de apparaten onafhankelijk van elkaar opereren.<sup>56</sup> Een gemengde multi-strategie is een gemengde strategie voor elke speler. En gegeven een gemengde multi-strategie kan men op een natuurlijke manier de verwachte uitbetaling aan elke spelers berekenen. Opgemerkt zij nog dat het spelen van een gemengde strategie niet per se inhoudt dat het spel meerdere keren gespeeld wordt.

Afhankelijk van het specifieke niet-coöperatieve spel dat in het geding is, kan een nash-evenwicht additionele bijzondere eigenschappen hebben. Een belangrijk geval is dat van een spel in strategische vorm tussen twee spelers dat een nulsomspel en ten minste één nash-evenwicht heeft. Men kan laten zien (zie § 2.5) dat in zo'n spel speler 1 in elk nash-evenwicht dezelfde uitbetaling  $v$  heeft; speler 2 heeft dan dus in elk nash-evenwicht uitbetaling  $-v$ .  $v$  is een bekende: het is de waarde van het spel.

Hét oplossingsconcept voor niet-coöperatieve spelen is dat van nash-evenwicht. Afhankelijk van het abstracte speltype van zo'n spel komt dat in verschillende vormen voor:

- Spelen in strategische vorm (statisch, met volledige informatie): nash-evenwicht.
- Spelen in uitgebreide vorm en herhaalde spelen (dynamisch, met volledige informatie): deelspelperfect nash-evenwicht.
- Stochastische spelen (statisch, met onvolledige informatie): bayesiaans

---

<sup>56</sup>Het cruciale kenmerk van een nash-evenwicht in gemengde strategieën is dat elke speler onzeker is over de keuzes van de andere spelers.

evenwicht.<sup>57</sup>

- Stochastische spelen (dynamisch, met onvolledige informatie): perfect bayesiaans evenwicht.<sup>58</sup>

In feite is het nash-evenwicht concept zelfs hét evenwichtconcept uit de (neoklassieke) economie. Er zijn vele bespiegelingen gehouden daaromtrent. Maar met “hét” moet men toch wel voorzichtig zijn. Een probleem met het nash-evenwichts oplossingsconcept is dat het optimaal voor een speler is om een nash-evenwichtsstrategie te spelen als de andere spelers hún deel van dat evenwicht spelen,<sup>59</sup> maar in het algemeen is het à priori niet duidelijk voor die speler dat de andere spelers dat doen.<sup>60</sup>

Een belangrijke vraag in de coöperatieve speltheorie is het vinden van redelijke oplossingsconcepten. Men zou graag zien dat deze de volgende vraag beantwoorden: welke coalitie(s) komt (komen) tot stand en welke uitbetaling krijgen de spelers in zo’n coalitie? De eerste vraag is nog steeds onderwerp van onderzoek. Voor spelen in karakteristieke functievorm zijn voor wat betreft de tweede vraag de volgende “partiële” oplossingsconcepten ontwikkeld: core, shapley-waarde, nucleolus, stabiele verzameling en onderhandelingsverzameling. Opgemerkt zij dat deze oplossingsconcepten voor coöperatieve spelen nogal verschillend van elkaar zijn en nauwelijks verwantschap met elkaar tonen zoals wel hierboven het geval was bij de nash-evenwichten.

## 1.7 Het nim- en hexspel nader bekeken

We hebben reeds opgemerkt dat elk nimspeel een waarde heeft. We gaan hieronder laten zien dat dat inderdaad zo is. Daartoe geven we hier een procedure, ontwikkeld door Bouton (1901), die de waarde van een gegeven nimspeel berekent en tevens voor de speler die kan winnen een winnende strategie verschaft. Deze procedure maakt gebruik van de notie van nimsom welke als volgt gedefinieerd is.

Onder een positie van het nimspeel verstaan we een mogelijke configuratie van lucifers na een bepaald aantal zetten. Gegeven een positie van het spel, bepaal voor elk hoopje hoeveel lucifers erin liggen. Dit geeft voor elk hoopje een getal; deze getallen onder elkaar tweetallig<sup>61</sup> opschrijvend en dan per kolom

<sup>57</sup>Men spreekt hier ook wel van bayesiaanse spelen.

<sup>58</sup>Van de notie van perfect bayesiaans evenwicht bestaan op haar beurt weer diverse verfijningen. De meest belangrijke verfijning is die van sequentieel evenwicht (geïntroduceerd door Kreps en Wilson).

<sup>59</sup>Dus men zou kunnen zeggen dat een nash-evenwicht “spy-proof” is, i.e. dat als elke speler een spion heeft die hem vertelt wat de strategieën van de andere spelers zijn, dit meehelpt voor de realisatie van een nash-evenwicht.

<sup>60</sup>Zogenaamde voorspelcommunicatie zou het spelen van een nash-evenwicht kracht kunnen bijzetten. Een ander probleem is dat een nash-evenwicht niet “stabiel” hoeft te zijn omdat het in bepaalde gevallen mogelijk is dat verandering van strategie in een nash-evenwicht een speler niet schaadt doordat er meerdere beste antwoorden zijn.

<sup>61</sup>Bijvoorbeeld: 0 is tweetallig 0, 1 is tweetallig 1, 2 is tweetallig 10, 3 is 11, 4 is 100, 5 is 101, 9 is 1001 en 163 is 10100100.

tientallig optellend, geeft een rijtje van getallen, dat we nimsom van de positie zullen noemen. Een positie met nimsom louter bestaand uit even getallen (zoals 8 of 92) heet even en de overige posities heten oneven.

Voorbeeld: beschouw het nimspeel (5, 7, 6, 4, 1, 3, 9), i.e. er is een hoopje met 5, eentje met 7, . . . , en eentje met 9 lucifers. Dit levert:

```

0101
0111
0110
0100
0001
0011
1001
- - - - -
1435.

```

De nimsom is dus het rijtje 1, 4, 3, 5.

Hier is de procedure:

Bepaal de nimsom van het gegeven spel. Als die som oneven is, dan heeft speler 1 een winnende strategie. En als die som even is, dan heeft speler 2 een winnende strategie. Een winnende strategie is bij elke zet ervoor te zorgen dat de de gecreëerde positie even nimsom heeft.<sup>62</sup>

(In Opgave 8 wordt gevraagd aan te tonen dat deze procedure juist is.) In het bovenstaande concrete nimspeel kan dat door 7 lucifers uit hoopje 1 weg te nemen.

Nu kunnen we inzien dat het nimspeel een waarde heeft. Inderdaad, we kunnen de spelposities van het nimspeel labelen als even of oneven zodanig dat een even positie na elke zet in een oneven positie overgaat en een oneven positie een zet toelaat die leidt tot een even positie. Stel de uitgangspositie is even, dan wordt speler 2 met een oneven positie geconfronteerd die hij door een geschikte zet even kan maken. Speler 1 maakt die dan, onafhankelijk van welke zet hij doet, weer oneven. Zo door redenerend zien we dat speler 2 zich een spelverloop kan garanderen waar hij louter even posities creëert en dat speler 1 daarbij louter oneven posities creëert. Omdat alle eindposities van het spel even zijn en het spel na eindig veel zetten afgelopen is, volgt nu dat speler 2 kan winnen en dat de waarde van dat spel dus is dat speler 2 wint. In het geval dat de

<sup>62</sup>Ook de notie van intelligentie kunnen we nu concretiseren in het geval van nim: een speler moet onder meer de hierboven uitgelegde tweetallige berekeningen kunnen uitvoeren en toepassen (of als dat te moeilijk is in staat zijn een andere procedure te begrijpen).



uitgangspositie oneven is, dan leidt deze redenering ertoe dat de waarde van het spel is dat speler 1 wint. Dus het spel heeft een waarde.

Beschouwen we nu ook nog het hexspel wat nader. We hebben al betoogd dat een hexspel de bijzonderheid heeft dat het spel niet kan eindigen in remise. Een bewijs van dit wellicht verbazingwekkend feit werd als eerste door Nash gegeven.<sup>63</sup>

Een andere bijzonderheid is dat in een hexspel speler 1 een winnende strategie heeft. Dat dit zo is kan men als volgt inzien uitgaande van het nog niet bewezen feit dat elk hexspel een waarde heeft. We doen dat uit het ongerijmde, door middel van een "strategie-steel-argument": omdat het spel een waarde heeft en niet in remise kan eindigen, heeft precies één der spelers een winnende strategie. Stel eens dat dat speler 2 zou zijn. We leiden nu een tegenspraak af door te laten zien dat dat zou impliceren dat ook speler 1 een winnende strategie heeft. We beschouwen daartoe de volgende strategie van speler 1:

- Zijn eerste zet doet hij door een willekeurig hexagon wit te maken.
- Bij elke verdere zet ziet hij de volgende imaginaire positie van het spel voor zich: hij doet net of het laatste hexagon dat hij wit gemaakt heeft er niet is; dat hexagon noemen we de "dummy". Verder vat hij alle andere witte hexagonen als zwarte op en alle zwarte hexagonen als witte. Speler 1 doet dus net of als hij een positie voor zich heeft die speler 2 zou kunnen tegenkomen. Hij nu de volgende strategie toepassen. Eerst identificeert hij het hexagon dat speler 2 zwart zou maken door zijn winnende strategie toe te passen. Dat hexagon maakt hij wit als dat kan, dat is als het bij dat hexagon niet om de dummy gaat. In het geval dat het niet kan, maakt hij een willekeurig (vrij) hexagon wit.

Allereerst overtuige men zich nu ervan dat deze strategie van speler 1 welgedefinieerd is. Wat dat betreft: in de laatste zin is er inderdaad nog een vrij hexagon, want als dat er niet zou zijn, dan had speler 2 al bij diens laatste zet gewonnen hetgeen onmogelijk is omdat speler 1 dat doet waarmee speler 2 zou winnen en het feit dat hij een extra wit hexagon heeft (de dummy) niet nadelig voor hem kan zijn. Vervolgens moet men inzien dat deze strategie een winnende strategie van speler 1 is. Men bedenke daartoe weer dat speler 1 dat doet waarmee speler 2 zou winnen en het feit dat hij een extra wit hexagon heeft (de dummy) niet nadelig voor hem kan zijn.

Winnende strategieën voor hex zijn bekend voor borden van lengte kleiner dan of gelijk aan 9. In dat verband is het nog interessant te vermelden dat als men in staat is een efficiënt berekenbare winnende strategie (voor speler 1) te geven die werkt voor hexspelen met willekeurige bordgrootten, dat men dan daarmee eigenlijk ook het zogenaamde  $P = NP$ -probleem opgelost heeft.<sup>64</sup>

<sup>63</sup>Interessant om op te merken is dat de stelling dat elk hexspel altijd een winnaar heeft, nauw verwant is met de toch wel diepzinnige dekpuntstelling van Brouwer (in twee dimensies).

<sup>64</sup>Dat is één der zeven 1-miljoen-dollar-problemen. Het  $P = NP$  probleem is een probleem uit de wiskunde en theoretische informatica. Men verwacht echter dat  $P \neq NP$  en daarmee dat men niet in staat zal zijn zo'n winnende strategie te geven.

## 1.8 Historische opmerkingen

De eerste echte speltheorie werd bedreven door de wiskundigen Borel en Zermelo. Maar eigenlijk begon het zich bezighouden met speltheorie pas goed door toedoen van Von Neumann rondom 1928 met zijn artikel “Zur Theorie der Gesellschaftspiele” (von Neumann (1928)) De drijfveer van Von Neumann voor zijn speltheoretisch werk was dat hij het mathematisch interessant vond en dat hij hoopte dat speltheorie licht op sommige problemen uit de economische theorie kon werpen. Eenmaal namelijk irrelevante details uit zo’n probleem verwijderd hebbend, resteert een abstract beslissingsprobleem: een spel. Ook de economist Morgenstern moet in dit verband worden genoemd. Samen met hem schreef Von Neumann in 1944 het meesterwerk “Theory of Games and Economic Behavior” von Neumann & Morgenstern (1953) over speltheorie. Dat boek, gebaseerd op het bovengenoemde artikel van von Neumann, sloeg in als een bom. Het is niet zo gemakkelijk te lezen en het duurde nog een hele tijd voordat het onderwerp beschikbaar kwam voor een breder publiek dan dat der mathematisch goed getrainden.<sup>65</sup> De verdere ontwikkeling van de speltheorie in het midden van de twintigste eeuw hangt nauw samen met de oprichting van “The RAND-Corporation”, de denktank van de Amerikaanse luchtmacht. Met betrekking tot latere grootheden op het gebied van de speltheorie noemen we nu slechts Nash, Aumann en Shapley.

Von Neumann en Morgenstern bekeken twee typen van spelen in hun boek: nulsomspelen met twee spelers behorende tot de niet-coöperatieve speltheorie en spelen in karakteristieke functieform met een willekeurig aantal spelers behorende tot de coöperatieve speltheorie. Voor niet-coöperatieve speltheorie voorbij nulsomspelen tussen twee spelers zagen ze geen echte toekomst. Mede omdat dergelijke spelen eigenlijk alleen goed duelachtige problemen kunnen beschrijven raakte de speltheorie bij (neoklassieke) economen, die met name geïnteresseerd zijn in niet-coöperatieve problemen, uit de mode. Nash bouwde in het tweetal artikelen Nash (1950, 1951) die theorie uit tot spelen in strategische vorm voor willekeurig veel spelers en legde daarmee de basis voor de niet-coöperatieve speltheorie. Daarbij generaliseerde hij het oplossingsconcept van zadelpunt voor nulsomspelen met twee spelers tot dat van wat men nu “nash-evenwicht” noemt. Dat bracht een grote opleving van de speltheorie teweeg omdat nu opeens allerlei andere reële-wereld-problemen ermee gemodelleerd konden worden. Een nogal technisch probleem was het geven van voldoende voorwaarden waaronder spelen in strategische vorm een nash-evenwicht hadden. In die context speelt de vaste punt stelling van Brouwer<sup>66</sup> trouwens een fundamentele rol. (In feite

<sup>65</sup>Nu zijn er een aantal boeken beschikbaar waar ook extra zorg is besteed aan de didactische kant. Met name zij hier het boek Binmore (1992) genoemd.

<sup>66</sup>Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), Nederlander (Fries, geboren te Overschie) en wiskundige. Doceerde in Amsterdam. Men hoort wel eens dat hij naast Christiaan Huygens eigenlijk de enige echt grote Nederlands wiskundige was. Grote verdiensten in de algebraïsche topologie. In 1907 publiceerde hij zijn proefschrift over intuïtionistische wiskunde, een proefschrift dat nadrukkelijk een bom onder de gevestigde orde in de wiskunde wilde wezen, waar een wiskundige uitspraak waar óf onwaar is. Volgens hem is er namelijk een derde weg: iets is waar noch onwaar, omdat het onbekend is. Brouwer was een idealist en nogal excentriek.

wordt een generalisatie van Kakutani van die stelling gebruikt om existentie van nash-evenwichten na te wijzen.)

Een van de belangrijkste concepten uit de speltheorie is inderdaad dat van nash-evenwicht. Economisten gebruikten het reeds voor Nash: het cournot-evenwicht (1838) en bertrand-evenwicht (uit de 19-e eeuw) zijn duidelijke voorbeelden van een nash-evenwicht; men zou nog kunnen zeggen dat het nash-evenwicht niks anders is dan een herinstructie van het cournot-evenwicht in een vorm die beter algemeen te hanteren is. Men heeft laten zien dat zelfs het walrasiaans evenwicht (marktevenwicht) op te vatten is als (een gegeraliseerd) nash-evenwicht ().<sup>67</sup> Het nash-evenwicht is in feite hét centrale evenwichtsconcept dat economen gebruiken. Een ander moderner voorbeeld van een toepassing van speltheorie is in de milieu-economie bij grensoverschrijdende milieuproblemen.

Laten we nu in het kort de bijdragen van de twee andere Nobelprijswinnaars in kwestie bespreken. Seltens bijdrage is gelegen aan de opkrikking van de speltheorie tot dynamische spelen, spelen waarin de grootheid tijd dus een prominente rol speelt. In deze context verfijnde hij het oplossingsconcept van nash-evenwicht tot deelspelperspectief nash-evenwicht. Harsanyi's bijdrage bestond erin de speltheorie uit te breiden tot de *setting* van onvolledige informatie. Tot 1968 zag de speltheorie daartoe geen kans. In deze context speelt het bayesiaanse (nash-)evenwicht een rol. In feite liggen de bijdragen van de drie Nobelprijswinnaars voornamelijk in de niet-coöperatieve speltheorie waar het begrip van nash-evenwicht (in welke zin dan ook) het centrale is.

Heden ten dage zijn vooral de zogenaamde evolutionaire speltheorie en de verzoening van coöperatieve en niet-coöperatieve speltheorie onderwerp van onderzoek. Evolutionaire speltheorie is een theorie waar men de notie van evolutie uit de biologie opgepakt heeft en in een speltheoretisch kader geplaatst heeft. Leer- en imitatieprocessen spelen daarbij een belangrijke rol. En de wens van verzoening werd op het eerstewereldcongres voor speltheorie in 2000 in Bilbao zelfs 'één der belangrijkste dingen voor de verdere ontwikkeling van de speltheorie genoemd.

We sommen hieronder enkele personen op die een beslissende bijdrage aan de speltheorie gegeven hebben en geven wat nadere informatie over hen:

- Émile Borel (1871-1956): Fransman en wiskundige. Was de eerste die een fatsoenlijke notie voor de maat van een verzameling introduceerde. Was tezamen met René Baire en Henri Lebesgue grondlegger van de theorie van functies van één reële variabele.
- Ernst Zermelo (1871-1953): Duitser en wiskundige. Hij was een van de eersten die zich met zogenaamde combinatorische spelen bezig hield. Verdere verdiensten onder andere voor de standaard axiomatisering van de verzamelingenleer (tezamen met Fraenkel).

---

Hij kwam om het leven bij een auto-ongeluk bij het bezorgen van een sinterklaascadeautje.

<sup>67</sup>Dat is alleen maar een steuntje in de rug voor de rechtvaardiging van het walrasiaans evenwicht.

- Oskar Morgenstern (1902-1976): Oostenrijker en econoom. Schreef samen met Von Neumann een boek von Neumann & Morgenstern (1953) over speltheorie met toepassingen in de economie.
- Johann von Neumann (1903-1957): Hongaar, wiskundige, fysicus, informaticus, . . . . Na zijn immigratie naar de Verenigde Staten van Amerika veranderde hij zijn voornaam in "John". Hij was een universeel genie, en een van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw. Zijn geheugen was formidabel. Leverde prachtige en beslissende bijdragen. Ontwikkelde onder andere het hilbertruimteformalisme van de quantummechanica. Voor ons hier is vooral interessant dat hij een boek von Neumann & Morgenstern (1953) over speltheorie met Oskar Morgenstern schreef. Morgenstern vond het "Ein Geschenk des Himmels" dat Von Neumann hem voorstelde tezamen een artikel over speltheorie te schrijven. Dat artikel groeide en groeide en werd zo uiteindelijk het genoemde boek. Volgens Von Neumann was dat met uitzondering van de boeken van Wald en Menger het enige boek over mathematische economie dat wiskundig gezien niet al geschreven had kunnen worden ten tijde van Newton. Von Neumann had een beslissende rol in de bouw van de eerste moderne computers. In Los Alamos bedacht hij het implosiemechanisme van plutoniumbommen dat vermoedelijk ook vandaag nog achter alle atoomwapens zit. Leverde ook belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de waterstofbom. Vermoedelijk was hij de meest invloedrijke adviseur op militair gebied die achtereenvolgens presidenten Roosevelt, Truman en Eisenhower hadden. Hij was in hoge mate verantwoordelijk voor het concept van de wederzijdse nucleaire afschrikking, waarop veertig jaar lang de wereldpolitiek gebaseerd is geweest. Hij was een van de eersten die de gevaren van roken inzag. Op 53-jarige leeftijd overleed hij aan botkanker, vermoedelijk opgedaan door het veelvuldig bijwonen van nucleaire tests. Hij trouwde twee keer; aan het huishouden leverde hij geen enkele bijdrage. Zijn eerste echtgenote pleegde zelfmoord.
- John Harsanyi (1920 - 2000): Hongaar en econoom. Hij was een uitgesproken anti-Marxist.
- John Nash (1928 - ): USA-er en wiskundige. Kreeg die prijs voor het werk in zijn proefschrift uit 1950. Dat proefschrift was slechts 27 bladzijden dik. Dat menig wiskundige zijn tijd niet wil verknoeien door mogelijke reële-wereld-interpretaties van hun concepten te onderzoeken, is in dat proefschrift duidelijk te zien. Alhoewel zijn proefschrift van groot belang is, is het wiskundig gezien relatief eenvoudig. De naam van John Nash tussen de drie nobelprijslaureaten in 1994 heeft in verschillende professionele kringen een zekere verbazing teweeggebracht. Menig econoom dacht namelijk dat Nash al lang dood was; Nash had namelijk zijn vertrouwen verloren in de relevantie van speltheorie na vastgesteld te hebben dat experimenten zijn theorie niet bevestigden en ging zich daarom weer meer met zuivere wiskunde bezighouden. En veel speltheoretici hadden die prijs liever aan

Robert Aumann, de onbetwiste leider van de wereldwijde gemeenschap van de speltheoretici, gegund... .

- Reinhard Selten (1930 - ): Duitser en speltheoret. Selten is een idealist. Hij is bijvoorbeeld een overtuigd Esperantist en is daarmee<sup>68</sup> een pleitbezorger voor deze taal als een mogelijke (of beter gezegd dé) gemeenschappelijke taal voor ons nieuwe Europa (voor onder andere politiek en wetenschappelijk gebruik). Van hem is de uitspraak: speltheorie is er om stellingen te spelen en niet om spelen te spelen.
- Robert Aumann (1930 - ): Israëliër, wiskundige en speltheoret. Deed zijn doctoraal in de wiskunde en kwam daarna in Princeton terecht waar hij John Nash leerde kennen en zo in speltheorie geïnteresseerd raakte. Hij is een van de leidende figuren in de neo-walrassiaanse economie en de speltheorie. Wat zijn zuiver wiskundige bijdragen betreft is het interessant te vermelden dat hij de theorie van het integreren van correspondenties ontwikkelde. Als wetenschapper stelt hij de rationaliteit van het menselijk handelen centraal. Als Jood leidt hij een religieus leven. Hijzelf ziet hierin geen tegenstelling omdat religie niet per definitie irrationeel is. (En inderdaad: net zo min is het bezoeken van een concert dat.) Hij kijkt geen televisie en leest nauwelijks de krant. Dat mede omdat hij een hekel aan sensationisme heeft. Volgens hem is het typisch voor de media dat zij bestaan van het kwade, het gemene en het incompetente. In 2005 kreeg hij samen de nobelprijs voor economie samen met T. Schelling.

Ook enigszins gezaghebbende meningen napratend, zou de auteur willen stellen dat speltheorie<sup>69</sup> zijn intrinsieke waarde voor de economie bewezen heeft. Maar nu moeten we dat dus wel nog gaan leren!<sup>70</sup>

## 1.9 Opgaven

**Opgave 1** *a. Geef een of ander volledig uitgewerkt speelplan voor elk van beide spelers in het boter-kaas-eieren-en-spel en speel het spel met deze strategieën.*

*b. Geef voor beide spelers van het schaakspel een speelplan dat tenminste twee zetten ver reikt.*

*c. Is in het schaakspel voor wit het speelplan "eerste zet e2-e4, tweede zet d2-d4 en derde zet a2-a3" een speelplan dat tenminste drie zetten ver reikt?*

**Opgave 2** *Ga na of de volgende spelen een waarde hebben en zo ja bepaal deze: Kamertje verhuren, mensch-erger-Je-niet, monopolie (met twee spelers), iet-wiet-waait-is-eer-lijk-weg, steen-papier-schaar, Russische roulette, gelijke kanten, Kolonel Blotto.*

<sup>68</sup>net als de auteur van dit typoscript

<sup>69</sup>In tegenstelling tot een ander modernisme in de economie: chaostheorie.

<sup>70</sup>Dat men allerlei boeken (over speltheorie) in de boekenkast heeft staan, doet daar niks aan af.

**Opgave 3** Geef voor elk van de volgende spelen aan of het een spel met of zonder volkomen informatie betreft: boter-kaas-en-eieren, iet-wiet-waait-is-eerlijk-weg, steen-papier-schaar, schaken, mensch-erger-Je-niet.

**Opgave 4** Geef voor elk van de volgende beweringen over het boter-kaas-en-eieren-spel, gespeeld door twee niet perse intelligente of rationele spelers, aan of ze waar of onwaar is.

a. Als speler 1 zowel intelligent als rationeel is, dan wint hij het spel.

b. Een speler die niet intelligent is kan het spel nooit winnen.

c. Stel de eerste zet is  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$  en de tweede zet is  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array}$ .

(a) Als we weten dat speler 1 intelligent en speler 2 rationeel is, dan kan men daaruit afleiden dat speler 1 rationeel is.

(b) Als we weten dat speler 2 rationeel is, dan kan men daaruit afleiden dat speler 2 niet intelligent is.

**Opgave 5** Kan een optimale strategie bij boter-kaas-en-eieren inhouden dat het gelijkspel wordt als de tegenstander geen optimale strategie speelt?

**Opgave 6** Beschouw het nimspeel.

a. Laat zien dat speler 1 een winnende strategie voor nim (5, 7, 6, 4, 1, 3, 9) heeft. Bepaal een optimale eerste zet voor deze speler.

b. Laat zien dat speler 1 nim (4, 5, 6, 6, 5, 4) verliest. Beschrijf, met een paar woorden, een optimale strategie voor speler 2.

c. Welke speler heeft een winnende strategie voor nim (5, 3, 8, 6, 7, 4, 3, 1, 1, 8, 7, 5, 4, 6)?

**Opgave 7** U gaat nim spelen, maar weet nog niet van tevoren met welke configuratie. Zou U graag willen beginnen?

**Opgave 8** Toon de volgende eigenschap van even en oneven posities van het nimspeel aan:

a. Een even positie gaat na elke zet over in een oneven positie.

b. Een oneven positie laat een zet toe die leidt tot een even positie.

**Opgave 9** Analyseer het nimspeel onder de misère-spelregel, i.e. de speler die als laatste een lucifer wegneemt heeft verloren.

**Opgave 10** Beschouwen het nimspeel (7, 9,  $x$ ) waar  $x \geq 1$ .

a. laat zien dat als  $x = 3$ , dat dan speler 1 een winnende strategie heeft.

b. Laat zien dat er precies één waarde van  $x$  is waarvoor speler 2 een winnende strategie heeft.

**Opgave 11** We hebben met een slimme redenering gezien dat in het hexspel speler 1 een winnende strategie heeft. Waarom kunnen we zo'n redenering niet toepassen op het schaakspel?

**Opgave 12** Is de volgende bewering waar of onwaar? *Bewering: in een  $2 \times 2$ -hexspel heeft speler 1 een strategie die hem garandeert dat hij verliest.*

**Opgave 13** Bepaal de strikt dominante strategieën, de nash-evenwichten, de strikt dominante evenwichten, de sterk pareto-efficiënte multi-strategieën en de zwak pareto efficiënte multi-strategieën voor de volgende bi-matrix-spelen en ga na of het spel een gevangenen-dilemma-spel is. Tenslotte bepaal voor elke speler zijn dictator-multi-strategieën.

$$a. \begin{pmatrix} 5; 5 & 4; 0 & 1; 9 \\ 3; 0 & 0; 6 & 2; 10 \\ 7; 8 & 5; 11 & 3; -3 \end{pmatrix};$$

$$b. \begin{pmatrix} 5; 5 & -4; 6 \\ 6; -4 & -3; 3 \end{pmatrix};$$

$$c. \begin{pmatrix} 1; 1 & 0; 0 \\ 0; 0 & 1; 1 \end{pmatrix};$$

$$d. \begin{pmatrix} 5; 10 & 6, 9 \\ 6, 11 & 6, 12 \end{pmatrix};$$

$$e. \begin{pmatrix} 8; 4 & 1; 6 & -4; 3 \\ 3; -3 & 4; 1 & 3; -2 \\ 7; -1 & 9; 5 & 2; 1 \end{pmatrix};$$

$$f. \begin{pmatrix} 3; 3 & 0; 6 \\ 6; 0 & 1; 1 \end{pmatrix};$$

$$g. \begin{pmatrix} 1; 0 & 6; 1 & 0; 7 \\ 2; 4 & 0; 2 & 3; 3 \\ 3; 9 & 2; 0 & 4; 0 \end{pmatrix};$$

$$h. \begin{pmatrix} 5; 4 & 4; 0 & 7; 9 \\ 3; 0 & 0; 6 & 2; 10 \\ 7; 8 & 3; 11 & 3; -3 \\ 1; 2 & -3; 7 & 4; 1 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 14** Bepaal de strikt dominante strategieën, de nash-evenwichten, de strikt dominante nash-evenwichten, de sterk pareto-efficiënte en de zwak pareto efficiënte multi-strategieën voor de volgende matrix-spelen:

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b. \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$c. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 15** *Bepaal de strikt dominante strategieën, de nash-evenwichten en de pareto-efficiënte multi-strategieën voor de volgende spelen uit § 1.3: gevangenendilemma, gevecht-der-geslachten, angsthazen, gelijke kanten, havik-duif en steen-papier-schaar.*

**Opgave 16** *Bestaat er een  $2 \times 2$  bi-matrix-spel met de volgende drie eigenschappen? 1. Er is één nash-evenwicht. 2. Precies één der spelers heeft een strikt dominante strategie. 3. Het nash-evenwicht is pareto-inefficiënt.*

**Opgave 17** *Stel dat in een dorp twee benzinstations actief zijn. Elke dag nemen ze de volgende beslissing: een hoge prijs (Euro per liter)  $H$  of een lage  $L$ . Bij gelijke prijzen delen de pomphouders de lokale markt, terwijl bij ongelijke prijzen degene met de laagste prijs zich het grootste marktaandeel toeëigent, zeg 75%. Veronderstel dat de winstmarge bij de hoge prijs 10% en bij de lage prijs 8% is, en dat totale vraag inelastisch en gelijk aan 1000 liter is. Ga na of deze gestileerde situatie een gevangenendilemma is.*

**Opgave 18** *Hoeveel bent U bereid maximaal te betalen om te mogen deelnemen aan het Sint-Petersburg-casino? Motiveer Uw antwoord.*



## Hoofdstuk 2

# Spelen in strategische vorm

We beginnen met het geven van de fundamentele notie van spel in strategische vorm; in het vorige hoofdstuk hebben we uitgelegd dat dat abstract speltype een prominente rol speelt in de theorie van niet-coöperatieve spelen. Vervolgens creëren we een vocabulaire voor zo'n spel door een twintigtal noties voor zo'n spel te definiëren. Na enkele verbanden tussen deze noties bekeken te hebben, leggen we uit hoe men deze in een gegeven spel nader kan bestuderen. In dit hoofdstuk is er speciale aandacht voor bi-matrix-spelen. Het kan geen kwaad eraan te herinneren dat we in dit typoscript niet pretenderen mathematisch rigoureuus te zijn.<sup>71</sup>

### 2.1 Notie

Laten we met de deur in huis vallen. Een spel in strategische vorm wordt gekarakteriseerd door  $n$  spelers, aan te duiden met  $1, \dots, n$ , voor elke speler  $i$  een niet-lege verzameling  $X^i$  en een functie  $f^i : X^1 \times \dots \times X^n \rightarrow \mathbb{R}$ .<sup>72</sup> Een element van  $X^i$  noemen we strategie. We noteren  $\mathbf{X} := X^1 \times \dots \times X^n$ , noemen de verzameling  $X^i$  de strategieverzameling van speler  $i$ , de functie  $f^i$  de uitbetalingsfunctie van speler  $i$  en een element uit  $\mathbf{X}$  multi-strategie.<sup>73</sup>

In het bijzonder wordt een spel in strategische vorm gegeven tussen twee spelers door twee niet-lege verzamelingen  $X^1, X^2$  en door twee functies  $f^1 : X^1 \times X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en  $f^2 : X^1 \times X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Een strategieverzameling is dus niet-leeg. We hadden ook kunnen toelaten dat een strategieverzameling leeg is, maar speltheoretisch is dat eigenlijk hetzelfde als veronderstellen dat de speler maar precies één strategie heeft.

Hier zijn enkele speciale typen van spelen in strategische vorm:

---

<sup>71</sup>Maar dat vaak wel zijn.

<sup>72</sup>Alhoewel het bij speltheorie om meer dan twee spelers gaat, blijft  $n = 1$  zinvol voor het vervolg, hetgeen we dan ook toelieten.

<sup>73</sup>In plaats van (multi-)strategie spreekt men bij spelen in strategische vorm ook wel van (multi)-actie.

- Nulsomspel: een spel waar de som van de uitbetalingsfuncties nul is, dus waar  $f^1 + \dots + f^n = 0$ .
- Antagonistisch spel: een nulsomspel tussen twee spelers.
- Bi-matrixspel: een eindig spel in strategische vorm tussen twee spelers waar elke strategieverzameling uit eindig veel elementen bestaat, zeg  $\#X^1 = m$  en  $\#X^2 = n$ .<sup>74</sup> Zo'n spel kunnen we op een natuurlijke wijze representeren als een  $m \times n$  bi-matrix  $(A, B)$ , i.e. een  $m \times n$  matrix met op elke plaats twee getallen.<sup>75</sup> Namelijk  $X^1$  als  $\{1, \dots, m\}$  en  $X^2$  als  $\{1, \dots, n\}$  voorstellende, zetten we op de eerste plaats van  $ij$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) van de matrix de uitbetaling aan speler 1 als speler 1 strategie  $i$  en speler 2 strategie  $j$  speelt, en zetten we op de tweede plaats de uitbetaling aan speler 2 als speler 1  $i$  en speler 2  $j$  speelt. We spreken nu ook wel van bi-matrixspel. Een bi-matrixspel heeft dus eindig veel multi-strategieën en kan genoteerd worden middels  $(A; B)$ .<sup>76</sup> Indien het spel bovendien een nulsomspel is, dan is het gebruikelijk om de tweede plaatsen in de matrix weg te laten en kunnen we het spel dus door één matrix voorstellen. Zo'n matrix met zo'n interpretatie heet een matrixspel. We duiden een matrixspel aan met  $A$ .<sup>77</sup>
- Gevangenendilemmaspel: zie hieronder.

Opmerkingen: 1) Bij de notie van (multi-)strategie, gaat het preciezer om een zuivere (multi-)strategie. Dat om onderscheid te maken met de notie van gemengde strategie (van een speler) zijnde een kansdichtheid op de verzameling der zuivere strategieën. (We komen daarop in een vervolgdeel terug.)

2) Door slechts een kleine verandering aan te brengen in de notie van spel in strategische vorm krijgt men die van pseudo-spel. Dat verschaft een *setting* waarmee men dingen als een zuivere ruil-economie met speltheoretische middelen aankan.

## 2.2 Vocabulaire

We gaan nu het vocabulaire voor spelen in strategische vorm uitbreiden. Dat doen we in de vorm van "notie: uitleg".

- Beste antwoord van speler  $i$  tegen een multi-strategie van de andere spelers: een beste strategie van speler  $i$ , gegeven de strategieën van de andere spelers.

<sup>74</sup>Als  $X$  een verzameling is, dan duidt men met  $\#X$  het aantal elementen van  $x$  aan.

<sup>75</sup>Dat kan in het algemeen wel op meerdere manieren, maar alles wat komen gaat is daar ongevoelig voor.

<sup>76</sup>Strikt gesproken zou men ook bi-matrices met oneindig veel rijen of kolommen kunnen bekijken, in welk geval er oneindig veel multi-strategieën zouden zijn.

<sup>77</sup>In het geval van eindige strategieverzamelingen en meer dan twee spelers leidt zo'n constructie tot zogenaamde multi-matrix-spelen.

Beste-antwoord-correspondentie van speler  $i$ : de afbeelding die aan elke multi-strategie van de andere spelers de verzameling van beste antwoorden van speler  $i$  tegen die multi-strategie toevoegt.

- (Strikt) Dominante strategie (van een speler): een strategie die altijd een (de) beste is, onafhankelijk van wat de andere spelers doen.
- Nash-evenwicht: een multi-strategie waar eenzijdig afwijken zich voor geen der spelers loont.
- (Strikt) dominant evenwicht: een multi-strategie bestaande uit een (strikt) dominante strategie voor elk der spelers.
- Sterk gedomineerde strategie (van een speler): een strategie van een speler waarvoor er een andere strategie van die speler is die voor die speler, onafhankelijk van wat de andere spelers spelen, een grotere uitbetaling oplevert.

Gedomineerde strategie (van een speler): een strategie van een speler waarvoor er een andere strategie van die speler is die voor die speler, onafhankelijk van wat de andere spelers spelen, een uitbetaling oplevert die tenminste even groot is en tenminste één keer groter is.

- Multi-strategie die procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën overleeft: verwijder voor elk der spelers alle sterk gedomineerde strategieën van die speler als die er zijn; we stoppen zo gauw geen der spelers er nog een heeft. Een strategie die er dan nog is, heet multi-strategie die procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën overleeft.<sup>78</sup>

Geïtereerd simultaan strikt dominant evenwicht: in geval er een unieke multi-strategie is die de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van strikt gedomineerde strategieën overleeft heet deze "geïtereerd simultaan strikt dominant evenwicht". (We gebruiken voor deze mondvol ook wel het acroniem gssde.)

- (Sterk) pareto-efficiënte multi-strategie: een multi-strategie  $\mathbf{x}$  waarvoor er geen andere multi-strategie  $\mathbf{z}$  bestaat waarin de uitbetaling van tenminste één speler hoger is dan in  $\mathbf{x}$  en waarin geen speler een lagere uitbetaling dan in  $\mathbf{x}$  heeft.

Zwak pareto-efficiënte multi-strategie: een multi-strategie  $\mathbf{x}$  waarvoor er geen andere multi-strategie bestaat waarvoor de uitbetaling aan elke speler hoger is dan in  $\mathbf{x}$ .

- Pareto-verbetering: een multi-strategie  $\mathbf{z}$  is een pareto-verbetering van een multi-strategie  $\mathbf{x}$  als de uitbetaling van elke speler in  $\mathbf{z}$  tenminste even groot is als in  $\mathbf{x}$  en er tenminste één speler is waar die uitbetaling groter is.

---

<sup>78</sup>Verder zij opgemerkt dat ook andere procedures in omloop zijn.

Unanieme pareto-verbetering: een multi-strategie  $\mathbf{z}$  is een unanieme pareto-verbetering van  $\mathbf{x}$  als de uitbetaling van elke speler in  $\mathbf{z}$  groter is dan die in  $\mathbf{x}$ .

- Volledig coöperatieve multi-strategie: een multi-strategie die een maximaliseerder is van de som der uitbetalingsfuncties.

$\lambda$ -gewogen volledig coöperatieve multi-strategie (waar  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$  een lineair gewicht<sup>79</sup> is): een multi-strategie die de  $\lambda$ -gewogen som  $\lambda^1 f^1 + \dots + \lambda^n f^n$  der uitbetalingsfuncties maximaliseert.

- Verlies van sociale welvaart van een nash-evenwicht: de hoogst mogelijke totale uitbetaling minus de totale uitbetaling in het nash-evenwicht.
- Dictator-multi-strategie van speler  $i$ : een multi-strategie die die speler een maximale uitbetaling geeft.

Dictator-multi-strategie: een dictator-multi-strategie voor een of andere speler.

- Gevangenendilemmaspel: een spel in strategische vorm waar elke speler een strikt dominante strategie heeft en het bijbehorende strikt dominante evenwicht niet zwak pareto-efficiënt is.
- Minimax-uitbetaling  $\bar{v}^i$  van speler  $i$ : de laagste uitbetaling waarop speler  $i$  door de andere spelers gehouden kan worden.
- Maximin-uitbetaling  $\underline{v}^i$  van speler  $i$ : de hoogste uitbetaling die speler  $i$  zichzelf kan garanderen.<sup>80</sup>
- (Strikt) individueel rationele uitbetaling voor speler  $i$ : uitbetaling  $w$  aan speler  $i$  waarvoor  $w \geq \bar{v}^i$  ( $w > \bar{v}^i$ ).

Interpreteren we even de noties van maximin- en minimaxuitbetaling nader. Voor het gemak doen we dat voor speler 1 in het geval van twee spelers. Als speler 1 een strategie  $x^1$  uit  $X^1$  speelt, dan is het slechtste dat hem overkomen kan dat hij de uitbetaling  $\min_{x^2 \in X^2} f^1(x^1, x^2)$  ontvangt. Als deze speler risicomijdend is, dan zal hij  $x^1$  zó kiezen dat deze uitbetaling zo groot mogelijk is. Dit leidt tot de maximinuitbetaling  $\max_{x^1 \in X^1} \min_{x^2 \in X^2} f^1(x^1, x^2)$ . En als de tegenstander van speler 1 multi-strategie  $x^2$  speelt, dan is de hoogste uitbetaling die hij zich kan garanderen gelijk aan  $\max_{x^1 \in X^1} f^1(x^1, x^2)$ . Zijn tegenstander kan deze gegarandeerde uitbetaling minimaliseren, tot de minimaxuitbetaling  $\min_{x^2 \in X^2} \max_{x^1 \in X^1} f^1(x^1, x^2)$ .

Bekijken we nu even de verbanden tussen bovenstaande noties. Men ziet snel in dat als een speler een strikt dominante strategie heeft, dat dat dan zijn strategie in elk nash-evenwicht is. En ook dat een (strikt) dominant evenwicht

<sup>79</sup>I.e. alle  $\lambda^i \geq 0$  en tenminste eentje groter dan 0.

<sup>80</sup>Bij de noties van verlies van sociale welvaart, minimax- en maximin-uitbetaling is een mathematisch rigoureuze uiteenzetting wat meer precisie gewenst; dat kan door gebruik te maken van de noties van supremum en infimum.

een nash-evenwicht is. We zagen al dat elke volledig coöperatieve multi-strategie (sterk) pareto-efficiënt is. Voor de rest zijn er geen algemene implicaties tussen deze noties. Nash-evenwichten hebben nogal de neiging om niet pareto-efficiënt te zijn<sup>81</sup> en volledig coöperatieve multi-strategieën de neiging om geen nash-evenwicht te zijn.

Hier zijn verdere verbanden. Allereerst:

- A. De minimax-uitbetaling aan speler  $i$  is tenminste even groot als zijn maximumuitbetaling.

Inderdaad, de laagste uitbetaling waarop speler  $i$  door de andere spelers gehouden kan worden, kan niet lager zijn dan de uitbetaling die hij zichzelf kan garanderen.

- B. In een nash-evenwicht is de uitbetaling aan elke speler individueel rationeel.

Inderdaad de minimaxuitbetaling is (voor het gemak even in het geval van twee spelers voor speler 1) kleiner dan of gelijk aan  $\max_{x^1 \in X^1} f^1(x^1, n^2)$  welk getal, omdat  $(n^1, n^2)$  een nash-evenwicht is, gelijk is aan  $f^1(n^1, n^2)$ .

Verder wordt in Opgave 35 gevraagd de volgende verbanden aan te tonen:

- C. Een multi-strategie  $\mathbf{x}$  is een nash-evenwicht dan en slechts dan als voor elke speler  $i$  de strategie  $n^i$  een beste antwoord is tegen de multi-strategie van de andere spelers.

- E. Een sterk gedomineerde strategie is ook een gedomineerde strategie.

- F. Als een speler een strikt dominante strategie heeft, dan zijn alle andere strategieën van die speler sterk gedomineerd.

- G. Elk nash-evenwicht overleeft de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën.

- H. Voor elke multi-strategie  $\mathbf{x}$  geldt:  $\mathbf{x}$  is een strikt dominant evenwicht  $\Rightarrow \mathbf{x}$  is een iteratief niet sterk gedomineerd evenwicht. Voor elke multi-strategie  $\mathbf{x}$  geldt:  $\mathbf{x}$  is een geïtereerd simultaan strikt dominant evenwicht  $\Rightarrow \mathbf{x}$  is een nash-evenwicht.

- I. Een sterk pareto-efficiënte multi-strategie is ook zwak pareto-efficiënt.<sup>82</sup>

- J. Elke  $\lambda$ -gewogen volledig coöperatieve multi-strategie is zwak pareto-efficiënt. Elke  $\lambda$ -gewogen volledig coöperatieve multi-strategie met  $\lambda^i > 0$  ( $i \in \mathcal{N}$ ) is sterk pareto-efficiënt.

---

<sup>81</sup>In die zin is het walrasiaans evenwicht uit de micro-economie speltheoretisch iets bijzonders: het is een nash-evenwicht (van een pseudospel) en tegelijkertijd pareto-efficiënt.

<sup>82</sup>Dat impliceert: een zwak pareto-inefficiënte (i.e. een multi-strategie die niet zwak pareto-efficiënt is) multi-strategie is ook sterk pareto-inefficiënt.

In het geval het strikt dominante evenwicht bestaat, dan is dit nog niet zo'n gekke voorspelling voor de uitkomst voor het spel. Het oplossingsconcept van strikt dominant evenwicht berust op het geloof dat een (rationele) speler geen sterk gedomineerde strategie zal spelen. Als het strikt dominante evenwicht niet bestaat, dan is het geïtereerde simultaan strikt dominante evenwicht een goede kandidaat. Maar ook dat hoeft niet te bestaan. Dan kan een nash-evenwicht uitkomst bieden. En als ook dat niet bestaat kan men als min of meer laatste toevlucht op zoek gaan naar nash-evenwichten in gemengde strategieën.<sup>83</sup> Merk nog op dat verband B zegt dat elk nash-evenwicht de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van strikt gedomineerde strategieën overleeft. Maar dat sluit niet uit dat er multi-strategieën die procedure overleven zonder dat deze een nash-evenwicht zijn.

### 2.3 Bepaling van allerlei objecten

Hierboven hebben we onder meer de belangrijke noties van nash-evenwicht en volledige coöperatieve multi-strategie ingevoerd. Nu gaan we ons even bezig houden met de vraag hoe we dergelijke objecten kunnen berekenen. Het is daarbij zinvol om onderscheid te maken tussen spelen waar elke strategieverzameling eindig veel elementen bevat, met als belangrijk speciaal geval de bi-matrix-spelen en met spelen waarbij dat niet zo is, met als belangrijk speciaal geval spelen waar elke strategie-ruimte een interval (van reële getallen) is. We beperken ons nu tot genoemde belangrijke speciale gevallen.

Bi-matrix-spelen. Het mooie is hier dat men door inspectie van de getallen de spel-theoretische objecten vaak direct kan bepalen. We vermelden hier slechts expliciet de volgende "mechanische recepten":<sup>84</sup> In een bi-matrix-spel komt het bepalen

- van een strikt dominante strategie
  - van speler 1 neer op het zoeken van een rij die op elke plaats een groter getal heeft dan de andere rijen op de corresponderende plaatsen.
  - van speler 2 neer op het zoeken van een kolom die op elke plaats een groter getal heeft dan de andere kolommen op de corresponderende plaatsen.
- van een nash-evenwicht neer op het zoeken van plaatsen  $ij$  met de volgende eigenschap: het eerste getal op plaats  $ij$  is maximaal in kolom  $j$  en het tweede getal is maximaal in rij  $i$ .

<sup>83</sup>Zoals we in een vervolgdeel van dit typoscript zullen zien hebben niet-triviale existentiële resultaten voor nash-evenwichten vaak betrekking op een context waar de strategieverzamelingen convex zijn. Dus ze zijn bijvoorbeeld niet van toepassing op eindige spelen. Wat te doen? Wel, zoals te verwachten, men was inventief en propageert (mede) daarom vaak in plaats van zuivere strategieën de gemengde strategieën.

<sup>84</sup>Dergelijke recepten zijn handig, maar de lezer doet er goed aan het waarom ervan te begrijpen.

- van een volledig coöperatieve multi-strategie neer op het zoeken van een plek  $ij$  waar de som van beide getallen maximaal is.
- van de minimax- en maximin-uitbetalingen neer op
  - het minimaliseren van de kolommaxima voor  $\bar{v}^1$ ,
  - het minimaliseren van de rijmaxima voor  $\bar{v}^2$ ,
  - het maximaliseren van de rijminima voor  $\underline{v}^1$ ,
  - het maximaliseren van de kolomminima voor  $\underline{v}^2$ .

Spelen in strategische vorm waar elke strategieverzameling een interval is.

Objecten als bovenstaande bepalen voor dergelijke gevallen kan best moeilijk zijn, omdat daar wel eens specifieke kennis van optimalisatietheorie voor nodig kan zijn. Dat betreft hier vooral de maximalisatietheorie van functies met meerdere veranderlijken al of niet onder restricties.

Het een nash-evenwicht zijn van een multi-strategie  $\mathbf{x}$  is equivalent met dat, gegeven  $j$ , de functie  $y \mapsto f^j(x^1, \dots, x^{j-1}, y, x^{j+1}, \dots, x^n)$  een maximum heeft te  $y = x^j$  en dus, als alles even meezit, equivalent met  $\frac{\partial f^j}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Leggen we vast:

$$\mathbf{x} \text{ is een nash-evenwicht} \Leftrightarrow \frac{\partial f^j}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = 0 \text{ voor alle } j. \quad (2.1)$$

In (2.1) zijn er  $n$  vergelijkingen in  $n$  onbekenden, dus volgens de  $nn1$ -regel is er dan precies één oplossing. (2.1) geeft niet alleen een recept om nash-evenwichten te bepalen maar toont dus ook de existentie ervan aan en als het even meezit ook hun uniciteit. In het algemeen is mathematisch rigoureuus aantonen van de existentie een vraag die omgeven is met geavanceerde wiskundige beschouwingen.

Net zo toont men aan dat het beste antwoord van speler  $i$  gegeven  $x^j$  ( $j \neq i$ ) gelijk is aan de  $y$  waarvoor

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^{i-1}, y, x^{i+1}, \dots, x^n) = 0. \quad (2.2)$$

Indien deze  $y$  ook nog onafhankelijk is van de  $x^j$  ( $j \neq i$ ), dan is  $y$  een dominante strategie.

Als alles even meezit, dan heeft een spel in strategisch vorm een (unieke)  $\lambda$ -gewogen volledig coöperatieve multi-strategie en deze kan gevonden worden door alle partiële afgeleiden van de functie  $\lambda^1 f^1 + \dots + \lambda^n f^n$  nul te stellen, i.e. voor een multi-strategie  $\mathbf{x}$  geldt

$$\mathbf{x} \text{ is } \lambda\text{-gewogen volledig coöperatief} \Leftrightarrow \lambda^1 \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(\mathbf{x}) + \dots + \lambda^n \frac{\partial f^n}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1 \leq j \leq N). \quad (2.3)$$

## 2.4 Voorbeelden

Hier zijn enkele voorbeeldjes met bi-matrix-spelen:

- In het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 3; -1 & 3; 1 & 6; 0 \\ 1; 0 & 3; 1 & 6; 0 \\ 2; 2 & 4; 1 & 8; 2 \end{pmatrix}$  is strategie 2 (i.e. rij 2) de enige sterk gedomineerde strategie van speler 1. Het is ook de enige gedomineerde strategie van speler 1. Speler 2 heeft geen sterk gedomineerde strategie maar wel een unieke gedomineerde strategie, namelijk strategie 1. Toepassing van de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën levert dus weer het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 3; -1 & 3; 1 & 6; 0 \\ 2; 2 & 4; 1 & 8; 2 \end{pmatrix}$  op.
- In het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 1; 0 & 3; 1 & 6; 0 \\ 1; 1 & 4; 1 & 8; 1 \end{pmatrix}$  is strategie 1 (i.e. rij 1) de enige gedomineerde strategie van speler 1. Deze strategie is niet sterk gedomineerd. En de gedomineerde strategieën van speler 2 zijn 1 en 3. Ook deze zijn niet sterk gedomineerd. Toepassing van de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën levert dus weer het zelfde bi-matrix-spel op.
- Toepassing van de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën op  $\begin{pmatrix} 6; 1 & 3; 1 & 1; 5 \\ 2; 4 & 4; 2 & 2; 3 \\ 5; 1 & 6; 1 & 5; 2 \end{pmatrix}$  leidt tot de bi-matrix  $(5, 2)$ .
- Toepassing van de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën op het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 1; 0 & 1; 4 & 0; 2 \\ 0; 6 & 0; 2 & 2; 0 \end{pmatrix}$  leidt tot de bi-matrix  $(1; 4)$ . Dus de multi-strategie  $(1, 2)$  is het gssde.
- In het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 1; 0 & 1; 4 & 0; 2 \\ 0; 6 & 0; 2 & 0; 3 \end{pmatrix}$  zijn  $(1, 2)$  en  $(2, 1)$  de pareto-efficiënte multi-strategieën. De zwak pareto-efficiënte multi-strategieën zijn  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$ .  
In het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 1; 0 & -1; 4 & 0; 2 \\ 0; 6 & 0; 2 & 0; 3 \end{pmatrix}$  zijn  $(1, 1)$  en  $(2, 1)$  de pareto-efficiënte multi-strategieën. De zwak pareto-efficiënte multi-strategieën zijn  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 2)$  en  $(2, 3)$ .
- Het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} -1; -1 & 2; 0 \\ 0; 2 & 3; 3 \end{pmatrix}$  is geen gevangenendilemmaspel. Het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 2; 2 & -1; 3 \\ 3; -1 & 0; 0 \end{pmatrix}$  is dat wel.



- Voor het bi-matrix-spel  $\begin{pmatrix} 8;7 & 1;3 & -4;3 \\ 3;-3 & 4;1 & 3;2 \\ 7;-1 & 3;6 & 4;3 \end{pmatrix}$  geldt  $\bar{v}^1 = 4$ ,  $\bar{v}^2 = 2$ ,  $\underline{v}_1 = 3$ ,  $\underline{v}_2 = 2$ .
- 

$$\begin{pmatrix} -1;1 & -1;1 & 0;0 \\ 2;-2 & -3;3 & -1;1 \\ 3;-3 & -5;5 & -7;7 \end{pmatrix}$$

is een nulsomspel. De multi-strategie  $(1, 2)$  is het enige nash-evenwicht.

- Alle multi-strategieën, m.u.v.  $(3, 3)$  en  $(4, 2)$ , van het bi-matrixspel

$$\begin{pmatrix} -1;0 & -1;1 & 0;0 \\ 2;-2 & -3;3 & -1;3 \\ 4;-3 & 5;-5 & 1;-7 \\ 3;-3 & 3;-5 & -6;8 \end{pmatrix}$$

zijn zwak pareto-efficiënt.

## 2.5 Antagonistische spelen

Beschouw een antagonistisch spel  $\Gamma$ , i.e. een spel in strategische vorm tussen twee spelers dat een nulsomspel is. Duidt met  $X$  en  $Y$  de strategieverzamelingen van speler 1 respectievelijk 2 aan en met  $f^i : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  de uitbetalingsfunctie van speler  $i$ . Er geldt:

Speler 1 heeft in elk nash-evenwicht dezelfde uitbetaling (en speler 2 dus ook).

Inderdaad dat is simpel: laat  $(a, b)$  en  $(c, d)$  nash-evenwichten zijn. Dan  $f^1(a, b) \geq f^1(c, b) = -f^2(c, b) \geq -f^2(c, d) = f^1(c, d)$ . Net zo geldt  $f^1(c, d) \geq f^1(a, b)$  en dus  $f^1(c, d) = f^1(a, b)$ , zoals gewenst.

Stel nu verder dat het antagonistisch spel tenminste één nash-evenwicht heeft. Noteer met  $v$  de uitbetaling van speler 1 in elk nash-evenwicht; voor speler 2 is die uitbetaling daarin dan dus  $-v$ .  $v$  heet de waarde (voor speler 1) van  $\Gamma$  en  $-v$  heet de waarde (voor speler 2) van  $\Gamma$ .  $v$  is dus niet gedefinieerd voor bijvoorbeeld voor steen-papier-schaar (omdat dat spel geen nash-evenwicht heeft), maar bijvoorbeeld wel voor

$$\begin{pmatrix} 1;-1 & 1;-1 & 1;-1 \\ 0;0 & 1;-1 & 0;0 \\ 1;-1 & 1;-1 & 0;0 \\ -1;1 & 1;-1 & -1;1 \end{pmatrix};$$

hier  $v = 1$ . We gaan nu duidelijk maken waarom we hierboven van waarde spreken.

Zij nu  $(n^1, n^2)$  een nash-evenwicht van  $\Gamma$ . Als speler 1 ervoor kiest om een nash-evenwichtsstrategie  $n^1$  te spelen (i.e. er is een strategie  $n^2$  van speler 2 zodanig dat  $(n_1, n_2)$  een nash-evenwicht is), dan geldt voor elke strategiekeuze  $x^2$  van speler 2 dat  $f^1(n^1, x^2) = -f^2(n^1, x^2) \geq -f^2(n^1, n^2) = f^1(n^1, n^2) = v$ . En als speler 2 ervoor kiest om  $n^2$  te spelen, dan geldt voor elke strategiekeuze  $x^1$  van speler 1 dat  $f^2(x^1, n^2) = -f^1(x^1, n^2) \geq -f^1(n^1, n^2) = f^2(n^1, n^2) = -v$ . Dus als een speler een nash-evenwichtstrategie speelt dan ontvangt hij tenminste de waarde  $v$ . In overeenstemming met de volgende definitie heet zo'n strategie optimaal:

- Een strategie  $x$  van speler 1 heet optimaal indien  $f^1(x, y) \geq v$  voor alle  $y \in Y$ . Met  $O^1$  duiden we de verzameling der optimale strategieën van speler 1 aan.
- Een strategie  $y$  van speler 2 heet optimaal indien  $f^2(x, y) \geq -v$  voor alle  $x \in X$ , oftewel indien  $f^1(x, y) \leq v$  voor alle  $x \in X$ . Met  $O^2$  duiden we de verzameling der optimale strategieën van speler 2 aan.

In bovenstaande bi-matrix is dus  $O^1 = \{1\}$  en  $O^2 = \{1, 2, 3\}$ . Er geldt (zie Opgave 36) het volgende verband tussen optimale strategieën en nash-evenwichten:

$O^1$  is de verzameling van die strategieën  $x$  van speler 1 waarvoor er een strategie  $y$  van speler 2 is zodanig dat  $(x, y)$  een nash-evenwicht is. En  $O^2$  is de verzameling van die strategieën  $y$  van speler 2 waarvoor er een strategie  $x$  van speler 1 is zodanig dat  $(x, y)$  een nash-evenwicht is.

Beschouw nu twee (intelligente en rationele) spelers die  $\Gamma$  gaan spelen. Is het nu zo dat ze in elk geval een optimale strategie zullen kiezen? Welnu, daar is veel voor te zeggen. Immers als een speler  $i$  dat niet doet, dan is dit een strategie die  $v$  niet garandeert. Dit betekent dat de tegenstander een strategie heeft zodanig dat  $i$  een uitbetaling kleiner dan  $v$  ontvangt.

## 2.6 Opgaven

**Opgave 19** *Bepaal voor de bi-matrix-spelen in Opgave 13 de dominante strategieën, de sterk gedomineerde strategieën, de minimax- en de maximin-uitbetalingen en de volledig coöperatieve multi-strategieën.*

**Opgave 20** *Er zijn twee spelers die elk een positief geheel kiezen. Degene die het laagste koos, heeft gewonnen behalve als de andere precies 1 meer koos, dan heeft deze gewonnen. Kieszen ze beide hetzelfde getal, dan is het remise. Bepaal de beste-antwoord correspondenties en de nash-evenwichten.*

**Opgave 21** *Ga na hoe het zit met de existentie van een strikt geïtereerd simultaan dominant evenwicht voor de volgende bi-matrix-spelen.*

a.  $\begin{pmatrix} 0; 4 & 4; 0 \\ 4; 0 & 0; 4 \end{pmatrix}$ .

b.  $\begin{pmatrix} -2; 2 & 1; -1 & 3; -3 \\ 3; -3 & 4; -4 & 2; -2 \\ 2; -2 & 0; 0 & -3; 3 \end{pmatrix}$ .

c.  $\begin{pmatrix} 5; 4 & 2; 0 \\ 3; 0 & 6; 3 \end{pmatrix}$ .

d.  $\begin{pmatrix} 0; 1 & 3; 4 \\ 5; 0 & 4; 2 \end{pmatrix}$ .

**Opgave 22** *Toon aan dat voor  $n = 1$  de noties van nash-evenwicht volledig coöperatieve multi-strategie, sterk pareto-efficiënte multi-strategie en zwak pareto-efficiënte multi-strategie op hetzelfde neerkomen.*

**Opgave 23** *Leg in reële-wereld-bewoordingen uit waarom de minimax-uitbetaling aan een speler tenminste even groot is als zijn maximin-uitbetaling.*

**Opgave 24** *Laat zien dat in het steen-papier-schaar de oplossingsconcepten van strikt dominant evenwicht, strikt geïtereerd simultaan dominant evenwicht en nash-evenwicht geen soelaas bieden. Welk oplossingsconcept zou dat wel doen?*

**Opgave 25 a.** *Geef een bi-matrix-spel dat precies één nash-evenwicht, geen dominante strategie en één pareto-efficiënte multi-strategie heeft.*

b. *Laat zien dat a hierboven niet lukt met een  $2 \times 2$ -bi-matrix-spel.*

**Opgave 26 a.** *Laat zien dat in een  $2 \times 2$ -bi-matrix-spel dat een gevangenendilemma is de uitbetaling voor elke speler in het strikte dominante evenwicht zowel aan zijn minimax-uitbetaling als aan zijn maximin-uitbetaling gelijk is.*

b. *Geef een  $3 \times 3$ -bi-matrix-spel dat een gevangenendilemma is en waar niet voor elke speler zijn nash-evenwichts uitbetaling gelijk is aan zijn minimax-uitbetaling.*

**Opgave 27 a.** *Laat zien dat in een gevangenendilemmaspel een volledig coöperatieve multi-strategie nooit een nash-evenwicht kan zijn.*

b. *Laat zien dat er geen  $2 \times 2$  bi-matrix-spel bestaat dat een gevangenendilemmaspel spel is en 4 volledig coöperatieve multi-strategieën bevat? En wat is het antwoord als we hierboven 4 door 3 vervangen?*

**Opgave 28** *Geef een  $3 \times 3$ -bi-matrix-spel met één nash-evenwicht zodanig dat de minimax- en maximin uitbetalingen van speler 1 hetzelfde zijn en de minimax- en maximin uitbetalingen van speler 2 hetzelfde zijn.*

**Opgave 29** Geef een voorbeeld van een antagonistisch spel dat geen nash-evenwicht heeft en geef er eentje dat er precies twee heeft. Kunt U ook nog een voorbeeld geven van een antagonistisch  $2 \times 2$ -bi-matrix-spel dat precies drie nash-evenwichten heeft?

**Opgave 30** Zijn de volgende beweringen voor een spel in strategische vorm waar of onwaar?

- a. Een nash-evenwicht is pareto-efficiënt.
- b. Als elke speler een strikt dominante strategie heeft, dan is er een nash-evenwicht.
- c. Een  $2 \times 2$ -bi-matrix-spel kan vier nash-evenwichten hebben.
- d. Het is mogelijk dat een speler een sterk gedomineerde strategie heeft zonder dat hij een strikt dominante strategie heeft.
- e. Als er een nash-evenwicht is, dan is voor elke speler de minimaxuitbetaling kleiner dan of gelijk aan zijn uitbetaling in het nash-evenwicht.
- f. Elk bi-matrix-spel heeft een strikt geïtereerd simultaan dominant evenwicht.
- g. Als  $\mathbf{n}$  een nash-evenwicht is en  $\mathbf{z}$  een multi-strategie is waarvoor  $f^j(\mathbf{z}) = f^j(\mathbf{n})$  ( $1 \leq j \leq N$ ) is, dan is  $\mathbf{z}$  ook een nash-evenwicht.
- h. Als speler  $i$  een dominante strategie  $d$  heeft en  $\mathbf{n}$  een nash-evenwicht is, dan geldt  $n^i = d$ .
- i. Het is mogelijk dat er twee nash-evenwichten  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{y}$  zijn waar  $\mathbf{y}$  een pareto-verbetering van  $\mathbf{n}$  is.
- j. Het is mogelijk dat een nash-evenwicht een pareto-verbetering van een volledig coöperatieve multi-strategie is.
- k. Als een speler een strikt dominante strategie heeft, dan is er een nash-evenwicht waarin die speler die strategie heeft.
- l. Een geïtereerd simultaan strikt dominant evenwicht is uniek.
- m. Elk bi-matrix-spel heeft een multi-strategie die de procedure van geïtereerde simultane eliminatie van sterk gedomineerde strategieën overleeft.

**Opgave 31** Geef een voorbeeld van een spel in strategische vorm waar er een pareto-efficiënte multi-strategie is die voor geen  $\lambda$  een  $\lambda$ -gewogen volledig coöperatieve multi-strategie is.

**Opgave 32** Bepaal de nash-evenwichten van het spel in strategische vorm tussen twee spelers gegeven door:  $X^1 = X^2 := \mathbb{R}$  en

$$f^1(x^1, x^2) := (100 - 2(x^1 + x^2))x^1 - 4x^1,$$

$$f^2(x^1, x^2) := (100 - 2(x^1 + x^2))x^2 - 4x^2.$$

**Opgave 33** *Beschouw het volgende spel tussen 100 spelers. Elke speler schrijft, zonder dat de andere spelers dat kunnen zien, op een briefje óf het getal 50 óf 500. Daarna leveren ze de briefjes bij de scheidsrechter in. Indien minder dan 60 spelers 500 gekozen heeft, ontvangt elke speler het door hem gekozen getal in Euro. Anderzijds ontvangt elke speler die 500 gekozen heeft 0 Euro en elke speler die 50 gekozen heeft 50 Euro.*

- a. *Formuleer dit spel als spel in strategische vorm.*
- b. *Laat zien dat de multi-strategie waar elke speler 50 als strategie heeft, geen nash-evenwicht is. En ook dat de multi-strategie waar elke speler 500 als strategie heeft, geen nash-evenwicht is.*
- c. *Laat zien dat een multi-strategie waar 59 spelers 50 als strategie hebben en de overige 500 hebben, een nash-evenwicht is.*
- d. *Bepaal alle nash-evenwichten.*

**Opgave 34** *De conflictsituatie van het Kolonel-Blotto-spel (zie § 1.3) kunnen we, in geval  $m = 3$  herleiden tot een bi-matrix-spel. De strategieën van Blotto zijn van de vorm  $(i, j)$  waar  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  en  $j = 3 - i$  als we afspreken dat  $(i, j)$  betekent: stuur  $i$  gevechtseenheden naar pas A en  $j$  stuks naar pas B. Voor Baloney zijn de strategieën van de vorm  $(i, j)$  waarbij  $i \in \{0, 1, 2\}$  en  $j = 2 - i$  en  $(i, j)$  betekent: verdedig pas A met  $i$  eenheden en pas B met  $j$  eenheden.*

- a. *Laat zien dat er 4 strategieën voor Blotto en 3 strategieën voor Baloney zijn.*
- b. *Geef de bi-matrix voor dit spel.*
- c. *Bepaal de nash-evenwichten, de sterk gedomineerde strategieën en de (strikt) dominante evenwichten.*

**Opgave 35** *Toon de verbanden C-I in § 2.4 aan.*

**Opgave 36** *Toon het in § 2.5 gegeven verband tussen optimale strategieën en nash-evenwichten aan.*



## Hoofdstuk 3

# Spelen in uitgebreide vorm

Dit hoofdstuk behandelt wat theorie voor spelen in uitgebreide vorm. Een doel is om zo'n spel enigszins formeel te definiëren; maar echt formeel doen we dat hier niet omdat dat te abstract is in dit hoofdstuk (behorend tot het *softe* deel van het typoscript). De *setting* die we hier geven heeft betrekking op niet-coöperatieve (eindige) spelen met volkomen en volledige informatie zonder kanszetten. Daar hebben we onze handen al meer dan vol aan. Speciale aandacht is er voor het geval van eindige strikt competitieve en eindige combinatorische spelen.

### 3.1 Notie

De notie van spel in uitgebreide vorm kwam al op informele wijze in Hoofdstuk 1 aan de orde. Nu gaan we iets formeler te werk door gebruik te maken van de notie van spelboom die zo'n spel op natuurlijke wijze weergeeft.

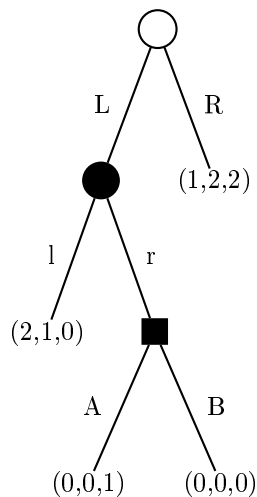
Een spelboom bestaat uit knopen en takken. Elke tak verbindt twee knopen en heeft een richting. Een knoop representeert een spelverloop tot zo ver. Bij elke knoop is één van de  $n$  spelers aan zet. De takken die de knoop verlaten representeren de mogelijke zetten van een speler. Elke speler weet als hij aan zet is waar hij zich in de spelboom bevindt, i.e. er is volkomen informatie.<sup>85</sup> We kunnen nu spreken van knopen die voorganger van een knoop zijn en van knopen die opvolger van een knoop zijn. Het spel begint ergens; dat wordt gerepresenteerd door één beginknoop.<sup>86</sup> Daar doet een speler, speler 1 genaamd, de allereerste zet in het spel. Dat leidt tot een opvolger van die knoop. Daar is weer een der spelers aan zet. Enzovoorts.

Een spelboom is vaak zó getekend dat gedurende het spel de boom van links naar rechts of van boven naar beneden doorlopen (zoals in Figuur 3.1) wordt. Wij kiezen steeds voor deze laatste mogelijkheid. Verder zullen we alle

---

<sup>85</sup>Met onvolkomen informatie kan men rekening houden door iets algemener te werk te gaan middels zogenaamde informatieverzamelingen.

<sup>86</sup>De veronderstelling van een unieke beginknoop is geen echte beperking der algemeenheid omdat de situatie van een spelboom met meerdere beginknopen (waar steeds dezelfde speler begint) te herleiden is tot een spelboom die wel maar één beginknoop heeft.



posities die na eenzelfde aantal zetten bereikt kunnen worden op een zelfde niveau tekenen. Spelers duiden we aan met hun eigen knoop-symbooltje zoals  $\blacksquare$  en  $\circ$ . Mocht dat nodig zijn, dan nummeren we de spelers ook nog: de speler die de eerste zet doet, aan de beginknoop, zullen we weer met speler 1 aanduiden en we nummeren van boven naar beneden in de boom en van links naar rechts verder. Typisch aan de structuur van een spelboom zijn:

- Er is een unieke beginknoop.
- Elke knoop ongelijk aan de beginknoop is opvolger van de beginknoop.
- Elke knoop ongelijk aan de beginknoop heeft precies één voorganger.
- Geen pad in de boom verbindt een knoop met zichzelf.<sup>87</sup>

Dit impliceert dat er een uniek pad naar elke knoop vanuit de beginknoop is. In dit hoofdstuk is het de bedoeling dat we ons louter met eindige spelen in uitgebreide vorm bezighouden. Dat betekent dat we ons verder steeds bezig zullen houden met eindige spelbomen, i.e. met spelbomen die eindig veel knopen en takken hebben. Merk op dat eindig veel takken betekent dat elke speler voor elke zet slechts eindig veel mogelijkheden heeft. Omdat er eindig veel knopen zijn, zijn er altijd eindknopen. Aan de eindknopen staan de uitbetalingsvectoren (i.e. de uitbetalingen van de spelers in vectornotatie) genoteerd.<sup>88</sup> Elke knoop die geen eindknoop is heet beslissingsknoop.

Opgemerkt zij tenslotte dat we niet verondersteld hebben dat spelers om de beurt zetten. Het is zelfs zo dat eenzelfde speler best meerdere keren achter elkaar mag zetten. Ook is het goed op te merken dat verschillende knopen

<sup>87</sup>I.e. het is niet mogelijk door de richtingen van de takken te volgen om ergens bij een knoop in de boom te beginnen en weer bij diezelfde knoop uit te komen.

<sup>88</sup>Ook in geval van oneindig veel knopen kan men soms op zinvolle manier uitbetalingen opnemen.



eenzelfde positie van een spel kunnen representeren: verschillende spelverlopen kunnen best tot dezelfde positie leiden.

## 3.2 Strategieën

We hebben al kennis gemaakt met de notie van strategie van een speler in een spel in strategische vorm. Beschouw nu een spel in uitgebreide vorm.

- Onder een strategie van een speler in een spel in uitgebreide vorm verstaat men een specificatie van welke zet hij zal uitvoeren op elke knoop van de spelboom waar hij aan zet is.
- Onder een multi-strategie van een spel in uitgebreide vorm verstaat men het geven zijn van een strategie voor elk der spelers.

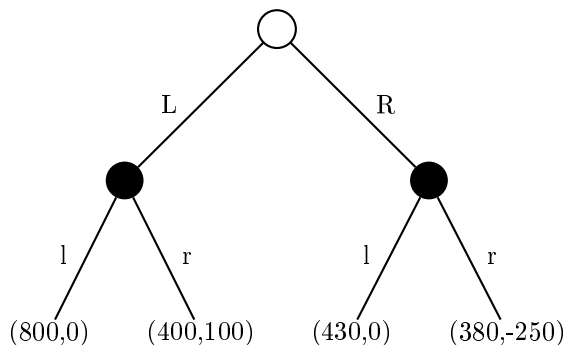
Een strategie van een speler specificeert dus wat die speler speelt als antwoord op elke mogelijke situatie die in principe zou kunnen ontstaan gedurende het spelen. Deze definitie is wellicht subtieler dan men denkt. Het is namelijk niet alleen een volledig uitgewerkt speelplan (waarmee een scheidsrechter het spel kan spelen) maar zelfs meer: een volledig uitgewerkt speelplan hoeft de zetten niet te specificeren bij knopen waar de speler nooit zal komen, een strategie moet dat wel. Bijvoorbeeld bij het schaakspel: als de witspeler bij zijn eerste zet e2-e4 opschrijft, dan hoeft hij voor een volledig uitgewerkt speelplan niet ook nog eens zetten te specificeren bij knopen waar hij aan zet is die in de boom onder e2-e3 hangen. Deze definitie van strategie lijkt teveel van het goede en is het ook voor zekere doeleinden. In dat verband zullen we onder een gereduceerde strategie een strategie verstaan die niet dit soort overbodige informatie bevat.<sup>89</sup> Anders gezegd: een gereduceerde strategie is een volledig uitgewerkt speelplan,

Men verwarre “strategie” niet met “zet”. Gegeven een multi-strategie, is bij elke knoop ongelijk aan een eindknoop een zet bepaald en kan het spel dus gespeeld worden.

Bovenstaande definitie van strategie maakt bijvoorbeeld dat in een spelboom met  $L$  knopen die geen eindknoop zijn waar elke dergelijke knoop  $M$  takken heeft, er  $M^L$  multi-strategieën zijn.

Figuur 3.1 geeft een simpel voorbeeld van een spelboom. Speler 1 is alleen aan zet bij de witte knoop en speler 2 bij de zwarten. Speler 1 heeft bij de witte knoop de keuze uit twee zetten, namelijk  $L$  (links) en  $R$  (rechts). Dat maakt dat hij 2 strategieën heeft. Bij elk van de zwarte knopen heeft speler 2 de keuze uit twee zetten, namelijk  $l$  (links) of  $r$  (rechts). Maar opgelet, speler 2 heeft vier strategieën en niet twee! Inderdaad, “altijd  $l$ ” is er een, hetgeen betekent dat speler 2 altijd links kiest, onafhankelijk van wat speler 1 gespeeld heeft. Net zo is “altijd  $r$ ” er een. Een derde is: “wissel om”, hetgeen betekent dat als speler 1 links kiest, dan kiest speler 2 rechts en als 1 rechts kiest, dan kiest 2 links. En tenslotte is er nog de strategie “imiteer” voor speler 2 hetgeen betekent dat als

<sup>89</sup>Echter die informatie is wel van belang in de context van onder andere deelspelperfectie zoals we zullen zien.



Figuur 3.1: Een spelboom.

speler 1 links kiest, dat dan speler 2 links kiest en als speler 1 rechts kiest, dat dan speler 2 rechts kiest.

Naast de notie van "(zuivere) strategie" voor een spel in uitgebreide vorm zijn er ook nog de noties van "gemengde strategie" en "gedragstrategie". Een nog niet zo gekke manier om tegen al die noties aan te kijken is als volgt. Een (zuivere) strategie van speler  $i$  is een boek met instructies waar er voor elke beslissingsknoop voor  $i$  een bladzijde is waar staat welke keuze  $i$  daar maakt. De verzameling van strategieën van speler  $i$  is zo een bibliotheek van degelijke boeken. Een gemengde strategie is een kansdichtheid op die bibliotheek. Een gemengde strategie spelen komt nu neer op het kiezen van een boek uit de bibliotheek middels een kansmechanisme dat de voorgeschreven kansdichtheid heeft. Een gedragsstrategie tenslotte is, net als een zuivere strategie, een boek, maar van een andere soort. Elke bladzijde verwijst nog steeds naar een beslissingsknoop, maar er staat nu geen keuze maar een kansdichtheid voor de verschillende keuzen.

### 3.3 Normaliseren

We gaan nu aan een spel in uitgebreide vorm een spel in strategische vorm kunnen toekennen en krijgen zo een heel additioneel vocabulaire voor spelen in uitgebreide vorm cadeau.

Het idee is dat gegeven een spel in uitgebreide vorm, we daarbij op natuurlijke wijze een spel in strategische vorm kunnen construeren: we hebben al voor elke speler de notie van strategie en daarmee ook zijn strategieverzameling gedefinieerd en een multi-strategie leidt tot voor elke speler tot een uitbetaling. Dat spel heet het geassocieerde spel in strategische vorm, of ook wel de normale vorm van het oorspronkelijke spel.<sup>90</sup> Deze constructie heet normalisatie.

<sup>90</sup>Sommige auteurs noemen "spel in normale vorm" wat wij "spel in strategische vorm" noemen.

Hieronder is een normale vorm van de spelboom uit Figuur 3.1 weergegeven; het is een  $2 \times 4$ -bi-matrix-spel:

$$\begin{pmatrix} & \text{altijd } l & \text{altijd } r & \text{wissel om} & \text{imiteer} \\ L & 800; 0 & 400; 100 & 400; 100 & 800; 0 \\ R & 430; 0 & 380; -250 & 430; 0 & 380; -250 \end{pmatrix}$$

Omdat een normale vorm van een spel in uitgebreide vorm een spel in strategische vorm is, zijn voor zo'n vorm noties als die van dominante strategie, nash-evenwicht en volledig coöperatieve multi-strategie gedefinieerd. In de bovenstaande spelboom bijvoorbeeld, heeft speler 1 geen dominante strategie, want als speler 2 wissel om speelt, dan is de strategie  $R$  voor 1 het beste en als 2 altijd  $r$  speelt dan is  $L$  voor 1 het beste. Speler 2 heeft wel een dominante strategie, namelijk wissel om. Inderdaad: als speler 1  $R$  speelt, dan zijn wissel om en altijd  $l$  een beste strategie voor 2 en als speler 1  $L$  speelt dan zijn wissel om en altijd  $r$  een beste strategie voor 2.

De multi-strategie ( $R$ , wissel om) is een nash-evenwicht. Inderdaad, in die multi-strategie is de uitbetaling van speler 1 gelijk aan 430 en die van speler 2 gelijk aan 0. Afwijken voor speler 1 loont zich niet. (Want dan wordt zijn strategie  $L$ , wordt ( $L$ , wissel om) de nieuwe multi-strategie en ontvangt hij 400.) Ook voor speler 2 loont afwijken zich ook niet. (Want het resultaat daarvan levert hoe dan ook 0 of  $-250$  op). Ook de multi-strategie ( $L$ , altijd  $r$ ) is een nash-evenwicht. De multi-strategie ( $R$ , altijd  $l$ ) is geen nash-evenwicht omdat het zich daar voor 1 loont om af te wijken. Verder zijn alle andere multi-strategieën (er zijn er acht stuks in totaal) geen nash-evenwicht.

Dat het vocabulaire voor spelen in uitgebreide vorm echt groter dan dat voor spelen in strategische vorm is, komt omdat de uitgebreide vorm van een spel een rijkere structuur dan zijn normale vorm heeft. Gegeven een spel in uitgebreide vorm kan men dus zijn normale vorm bepalen. Maar als we een spel in strategische vorm hebben dat een normale vorm van een of ander spel in uitgebreide vorm is, dan kunnen we in het algemeen niet meer achterhalen welk spel in uitgebreide vorm dat was. We merken op dat normalisatie de volkomen informatie van het oorspronkelijke kapotgemaakt gemaakt heeft: in elk spel in strategische vorm is de informatie onvolkomen.

### 3.4 De procedure van de terugwaartse inductie

Gegeven een eindige spelboom, i.e. een eindig spel in uitgebreide vorm, is er de zogenaamde procedure van de terugwaartse inductie. We leggen deze procedure nu eerst uit aan de hand van het volgende luciferspel tussen twee spelers: op een hoopje liggen 25 lucifers. Om de beurt nemen de spelers 1, 2 of 3 lucifers weg. Degene die het laatst zet, heeft verloren. De procedure analyseert het spel van het einde naar het begin: de positie van 1 lucifer is verliezend, i.e. de speler die bij die positie aan zet is, is verloren. Posities met 2, 3 of 4 lucifers zijn winnend, i.e. de speler die aan zet is, kan winnen. Immers dat kan door respectievelijk 1, 2 of 3 lucifers weg te nemen. Posities met 5 lucifers zijn verliezend, want wat

de speler die aan zet is ook speelt zijn tegenstander krijgt een winnende positie voor zijn neus. Zo doorgaande zien we dat de verliezende posities precies met 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ... lucifers zijn. Conclusie: speler 1 verliest dit spel. (Merk op dat we de spelboom niet nodig hadden voor deze analyse.)

Nu algemeen. De procedure van de terugwaartse inductie kent aan elke knoop die geen eindknoop is een (niet per se unieke) zet toe. Een keuze van zo'n zet aan elke knoop leidt tot een (multi-)strategie. We noemen zo'n (multi-)strategie een terugwaartse-inductie-(multi-)strategie.<sup>91</sup> Onze formulering van deze procedure maakt gebruik van de volgende verdere terminologie en notatie voor spelbomen: een knoop heet voorlaatst als elke opvolger ervan een eindknoop is. En met  $\mathbf{u}_X$  duiden we de uitbetalingsvector aan een eindknoop  $X$  aan. Gegeven een spelboom is de procedure nu als volgt:

- A. Voor elke voorlaatste knoop  $V$ : laat  $i$  de speler zijn die bij  $V$  aan zet is. Ken aan  $V$  een zet  $x_V$  toe die tot een hoogste uitbetaling voor  $i$  leidt. Ken verder, met  $E$  de eindknoop waartoe de zet  $x_V$  leidt, aan  $V$  de uitbetalingsvector  $\mathbf{u}_E$  toe.
- B. Laat alle eindknoten en takken die aan de voorlaatste knopen vastzitten weg. Als er geen andere knoop dan de beginknoop resteert, dan stop. Anders herhaal A met de zo verkregen nieuwe spelboom.

Men zou kunnen zeggen: in een terugwaartse-inductie-strategie houdt een speler bij eerdere zetten rekening met de (optimale) zetten later in het spel.

Omdat er slechts eindig veel knopen zijn is het duidelijk dat

Elk eindig spel in uitgebreide vorm met volkomen informatie heeft een terugwaartse-inductie-multi-strategie.

Een belangrijke eigenschap van terugwaartse-inductie-multi-strategieën is het volgende resultaat van Kuhn:

Beschouw een eindig spel in uitgebreide vorm met volkomen informatie. Elke terugwaartse-inductie-multi-strategie is een nash-evenwicht.

Aantonen van dit resultaat heeft best wat voeten in de aarde als men dat goed wil doen. Daarom kan men dat beter uitstellen tot in een mathematisch rigoureuze aanpak.<sup>92</sup>

We kunnen nog concluderen dat

<sup>91</sup>Het idee achter deze procedure kan veel algemener gepresenteerd worden. De theorie daarover is die van het dynamisch programmeren.

<sup>92</sup>Maar hier tonen we het, voor de liefhebber, aan. Zo beschouw een eindig spel in uitgebreide vorm  $G$  en zij  $\mathbf{x}$  een terugwaartse-inductie-multi-strategie.  $\mathbf{x}$  is dus een multi-strategie van het met  $G$  geassocieerde spel in strategische vorm  $\Gamma$  met strategieverzamelingen. Stel  $\mathbf{x}$  zou geen nash-evenwicht van  $G$ , i.e. van  $\Gamma$  zijn. Dan is er een speler  $i$  en een strategie  $a \in X^i$  zodanig dat spelen van  $a$  in plaats van  $x^i$  voor die speler een hogere uitbetaling oplevert. Zij nu  $\mathcal{K}$  de verzameling der knopen  $L$  van  $G$  die geen eindknoop zijn met de eigenschap dat in het deelspel van  $G$  met beginknoop  $L$  speler  $i$  een strategie heeft die hem een hogere uitbetaling oplevert

Elke eindig spel in uitgebreide vorm met volkomen informatie heeft een nash-evenwicht.

Bovenstaande sluit niet uit dat nash-evenwichten kunnen zijn die geen terugwaartse-inductie-multi-strategie zijn. Bijvoorbeeld in het spel in Figuur 3.1 is dat zo. Dit spel heeft als unieke terugwaartse-inductie-multi-strategie het nash-evenwicht (rechts, wissel om). In het bijzonder is het nash-evenwicht ( $L$ , altijd  $r$ ) geen terugwaartse-inductie-multi-strategie.

Terugwaartse inductie komt ook wel voor in andere contexten. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld: op een donderdag wordt aan een gevangene het volgende vonnis meegedeeld: "U wordt de volgende week terechtgesteld. Maar de precieze dag waarop dit gebeurd zal als een verrassing komen." De (intelligente) gevangene redeneert nu als volgt: "Op de laatste dag, zondag, kan ik niet worden terechtgesteld, want dan zou ik niet verrast zijn omdat ik zaterdag al wist dat het dan zou moeten gebeuren. Dat inzicht impliceert dat ik ook niet op zaterdag kan worden terechtgesteld, want op vrijdag wist ik al dat het op zaterdag zou moeten gebeuren. Enzovoorts ..... dus het vonnis is onuitvoerbaar!" En zo kwam de terechtstelling toch als een verrassing, geheel conform het vonnis ... .

### 3.5 Deelspelen en deelspelperfectie

Hier is nog een belangrijke toevoeging aan het vocabulaire voor spelen in uitgebreide vorm:

- Een deelspel van een spel in uitgebreide vorm is een spel verkregen uit het oorspronkelijke spel door bij een beslissingsknoop te beginnen.
- Deelspelperfect nash-evenwicht: een nash-evenwicht dat voor elk deelspel een nash-evenwicht blijft.

Dus het aantal deelspelen van een spelboom is gelijk aan het aantal knopen minus het aantal eindknopen. Opgemerkt zij nog dat een deelspel dezelfde spelers behelst als het oorspronkelijke spel, ook al kunnen in zo 'n deelspel sommige spelers niet aan zet komen.

Merk op dat we het al of niet deelspelperfect van een nash-evenwicht zijn niet kunnen controleren aan de hand van een normale vorm.

We lichten de notie van deelspelperfect nash-evenwicht nu toe aan de hand van de spelboom in Figuur 3.1. Het nash-evenwicht ( $L$ , altijd  $r$ ) is niet deelspelperfect. Inderdaad, bij het deelspel dat hoort bij de positie die ontstaat nadat

---

dan  $x^i$  zou doen.  $\mathcal{K}$  is niet leeg omdat de beginknoop erin zit. Zij  $K^* \in \mathcal{K}$  zodanig dat  $K^*$  geen opvolger in  $\mathcal{K}$  heeft. Beschouw nu het deelspel  $G'$  van  $G$  met beginknoop  $K^*$ . Er is dan een strategie  $b$  van  $i$  die tot een grotere uitbetaling leidt dan  $x^i$  zou doen. Omdat  $K^*$  geen opvolger in  $\mathcal{K}$  heeft volgt dat  $i$  aan zet is bij  $K^*$ . En verder nog dat (ga na): als  $i$  de strategie  $b$  toepast in  $K^*$  en daarna de strategie  $x^i$ , dan is zijn uitbetaling groter dan als hij louter  $x^i$  toepast. Maar deze laatste uitbetaling is de "terugwaartse-inductie-uitbetaling" van speler  $i$  in knoop  $K^*$  en daarmee de grootste uitbetaling die  $i$  ontvangen kan. Dit is een tegenspraak.

speler 1 rechts gekozen heeft, is (L, altijd  $r$ ) (of beter wat daar van over is in het nu ontstane deelspel) geen nash-evenwicht meer: er resteert dan namelijk een spel waarin speler 1 niet meer aan zet is, speler 2 de strategieën  $l$  en  $r$  heeft en het nash-evenwicht van dat deelspel is  $l$ . Bovenstaand euvel doet zich bij het nash-evenwicht (rechts, wissel om) niet voor: dat nash-evenwicht is deelspelp perfect.

Het voorgaande gebruikend zien we dat in dit spel een nash-evenwicht deelspelp perfect is dan en slechts dan als het een terugwaartse-inductie-multi-strategie is. Dat is geen toeval.<sup>93</sup>

Beschouw een eindig spel in uitgebreide vorm met volkomen informatie. Elke terugwaartse-inductie-multi-strategie is een deelspelp perfect nash-evenwicht. En elk deelspelp perfect nash-evenwicht is een terugwaartse-inductie-multi-strategie.

Voor een bewijs hiervan verwijzen we naar de literatuur.

Het idee achter deelspelp perfectie is het volgende: de verzameling van nash-evenwichten kan doorgaans zeer groot zijn, veel te groot: er kunnen nogal wat ongeschikte tussen zitten. Verscheidene speltheoretici hebben geprobeerd extra eisen aan de nash-evenwichten op te leggen waardoor die ongeschikte geëlimineerd worden. De belangrijkste eliminatie bestaat uit het zich beperken tot de deelspelp perfecte nash-evenwichten, i.e. tot de nash-evenwichten die voor elk deelspel een nash-evenwicht blijven. Nash-evenwichten die niet deelspelp perfect zijn, kunnen te maken hebben met strategieën die ongeloofwaardige dreigingen voorstellen. (Een dreiging is ongeloofwaardig als degene die dreigt die dreiging niet zal uitvoeren als het zover zal komen.) De meeste speltheoretici gaan ervan uit dat rationele spelers ongeloofwaardige dreigingen zullen ignoreren. Opgave 50 illustreert een en ander in dat verband met een concreet voorbeeld.

We kunnen nu concluderen:

Elk eindig spel in uitgebreide vorm met volkomen informatie heeft een deelspelp perfect nash-evenwicht.

### 3.6 Eindige combinatorische spelen

Onder een eindig combinatorisch spel verstaan we een spel in uitgebreide vorm met perfecte informatie zonder kanszetten

- waarbij er twee spelers zijn;
- dat eindig veel posities heeft;
- waarbij de spelers om de beurt een zet doen;
- waarbij de speler die de laatste zet doet wint (en de andere verliest).

<sup>93</sup>In feite is de notie van deelspelp perfect nash evenwicht een generalisatie van terugwaartse-inductie-multi-strategie. Maar vanwege onze *setting* is er geen verschil. Het verschil wordt zichtbaar zo gauw men zich met onvolkomen informatie bezig houdt.

Voorbeelden van eindige combinatorische spelen zijn het nim- en hexspel. Het schaakspel en boter-kaas-en-eieren zijn dat niet; ze zijn wel eindige strikt competitieve spelen (zie de volgende paragraaf).

We hebben voor het nimspeel al mooie resultaten verkregen, onder andere dat het een waarde heeft en dat elk der spelers een strategie heeft, optimale strategie genoemd, die hem op zijn minst die waarde garandeert. We gaan nu laten zien dat:

Elk eindig combinatorisch spel heeft een waarde.

Om dit doel te bereiken vatten we hier nu eerst de essentie samen van hoe we inzagen dat het nimspeel een waarde had. Welnu, allereerst was er de volgende observatie:

We kunnen de spelposities van het nimspeel labelen als even of oneven zodanig dat een even positie na elke zet in een oneven positie overgaat en een oneven positie een zet toelaat die leidt tot een even positie.

Gegeven nu een eindig combinatorisch spel, noemen we een labeling van de spelposities met bovenstaande eigenschap even-oneven-labeling. Verder, eenmaal zo'n labeling der posities hebbend kan men als volgt verder redeneren: stel de uitgangspositie is even, dan wordt speler 2 met een oneven positie geconfronteerd die hij door een geschikte zet even kan maken. Speler 1 maakt die dan, onafhankelijk van welke zet hij doet, weer oneven. Zo door redenerend zien we dat speler 2 zich een spelverloop kan garanderen waar hij louter even posities creëert en dat speler 1 daarbij louter oneven posities creëert. Omdat alle eindposities van het spel even zijn en het spel na eindig veel zetten afgelopen is, volgt nu dat speler 2 kan winnen en dat de waarde van dat spel dus is dat speler 2 wint. In het geval dat de uitgangspositie oneven is, dan leidt deze redenering ertoe dat de waarde van het spel is dat speler 1 wint. Dus het spel heeft een waarde.

Bij bovenstaande redenering hebben we slechts gebruikt dat het om een eindig combinatorisch spel gaat en slechts veronderstelt dat het spel een even-oneven-labeling bezit. Dus zo gauw we voor een eindig combinatorisch spel een even-oneven-labeling der posities voor elkaar kunnen krijgen, dan heeft dat spel een waarde. De vraag rijst dus nu hoe het zit met de existentie van zo'n labeling. Voor het nimspeel vond die labeling middels de nimsom plaats. Voor een willekeurig eindig combinatorisch spel is er ook zoiets als nimsom, namelijk de functie van Sprague en Grundy. We gaan daar niet nader op in. Dat hoeft ook niet om ons doel te bereiken; we kunnen met minder toe dan die (ingewikkelde) functie. Namelijk met het volgende label-algorithme voor eindige combinatorische spelen (dat begint met het labelen van de eindposities).

- A. Alle eindposities zijn even.
- B. Alle posities die na een geschikte zet over te voeren zijn in een even positie zijn oneven posities.

- C. Alle posities die na elke zet in een oneven positie uitkomen zijn even posities.
- D. Indien in C geen nieuwe even posities gevonden zijn, stop. Anders ga terug naar B.

Het fraaie is nu dat dit een even-oneven-labeling (als boven gedefinieerd) betreft. (En omdat zo'n labeling uniek is, geeft dit in het geval van het nimspeel dezelfde labeling als die middels de nimsom.)

Opmerking: de gegeven definitie van een eindig combinatorisch spel is die onder de normale spelregel, dat is die speler wint die de laatste zet doet. Niets belet echter om een andere spelregel te nemen: de speler verliest die de laatste zet doet, zoals bij het luciferspel uit § 3.4. Dit heet de *misère*-spelregel. Ook onder de *misère*-spelregel heeft elk eindig combinatorisch spel een waarde. Dat dit zo is kan men inzien door de bovenstaande argumentatie geschikt aan te passen (zie Opgave 40).<sup>94</sup>

### 3.7 Eindige strikt competitieve spelen

Een grotere klasse van spelen in uitgebreide vorm dan die der eindige combinatorische zijn de eindige strikt competitieve spelen. Daaronder verstaan we hier een spel

- waarbij er twee spelers zijn;
- dat eindig veel posities heeft;
- met  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \neq \emptyset$  de verzameling der mogelijke uitbetalingsvectoren<sup>95</sup>

$$u_1^1 > u_2^1 > \dots > u_n^1 \text{ en } u_i^2 = -u_i^1 \text{ (} 1 \leq i \leq n \text{)}.$$

Dus er geldt  $u_n^2 > u_{n-1}^2 > \dots > u_1^2$ . In woorden luidt de laatste eigenschap: de twee spelers hebben "omgekeerde" voorkeuren voor de "uitkomsten" van het spel. Veel gezelschapsspelen zoals schaken zijn een eindig strikt competitief spel. Bij schaken bevat de verzameling der uitbetalingsvectoren drie elementen, bijvoorbeeld  $(1, -1)$  (betekenend dat wit wint),  $(-1, 1)$  (betekend dat zwart wint) en  $(0, 0)$  (betekenend dat het remise is).

Doel hier is de Stelling van Zermelo aan te tonen. Deze luidt:

Gegeven een eindig strikt competitief spel. Er bestaat een strategie  $o^1$  van speler 1, een strategie  $o^2$  van speler 2 en een uitkomst  $v \in \{u_1^1, \dots, u_n^1\}$  zodanig dat  $o^1$  speler 1 een uitkomst garandeert die tenminste even goed als  $v$  is en  $o^2$  speler 2 een uitkomst garandeert die tenminste even goed als  $-v$  is.

<sup>94</sup>In dat verband is het interessant op te merken dat desalniettemin de analyse van eindige combinatorische spelen onder de *misère*-spelregel doorgaans moeilijker is dan onder de normale regel.

<sup>95</sup>Die verzameling is eindig omdat er maar eindig veel posities zijn.



Het getal  $v$  in deze stelling heet de waarde van het spel en de strategie  $o^i$  heet optimale strategie van speler  $i$ . Als er een waarde is, dan is deze uniek. Als  $w^i$  de uitkomst van speler  $i$  is in de stelling, dan volgt dat  $w^1 = v$  en  $w^2 = -v$ . Dus als het spel een waarde  $v$  heeft is en beide spelers een optimale strategie spelen, dan is de uitbetaling aan speler 1 gelijk aan  $v$  en die aan speler 2 gelijk aan  $-v$ .

Omdat een eindig strikt competitief spel een eindig spel in uitgebreide vorm betreft, hebben we in § 3.4 al gezien dat zo'n spel een (deelspel-perfect-)nash-evenwicht heeft. Dus ook het geassocieerde spel in strategische vorm  $\Gamma$  heeft een nash-evenwicht. Zij  $\mathbf{n}$  een nash-evenwicht. Omdat  $\Gamma$  een nulsomspel is, is zoals we in § 2.5 gezien hebben,  $v = f^1(\mathbf{n})$  de waarde. We hebben dus aangetoond:

Elk eindig strikt competitief spel heeft een waarde.

Opmerking: er is ook een notie van strikt competitief spel (zonder “eindig”). Dat zijn spelen waar er oneindig veel posities mogelijk zijn. In dat geval is het bestaan van een waarde van zo'n spel niet gegarandeerd. Toch kan men soms door zijn gezonde verstand te gebruiken aantonen dat er een waarde is en die waarde bepalen (zie bijvoorbeeld Opgave 45).

### 3.8 Opgaven

**Opgave 37** *Beschouw het boter-kaas-eieren. Kan een strategie van speler 2 met de eigenschap dat de eerste zet, als dat mogelijk is, in cel 9 is, optimaal zijn?*

**Opgave 38** *Zijn de volgende beweringen waar of onwaar?*

- a. *Als speler 1 in een eindig strikt competitief spel een optimale strategie speelt, dan leidt dat tot een uitkomst voor hem die gelijk is aan de waarde van het spel.*
- b. *Elk eindig spel in uitgebreide vorm heeft een waarde.*
- c. *Elk spel dat na eindig veel zetten afgelopen is, heeft eindig veel posities.*

**Opgave 39** *Zijn de volgende beweringen waar of onwaar voor een eindig spel in uitgebreide vorm?*

- a. *Het spel heeft een nash-evenwicht.*
- b. *Normalisatie van het spel geeft een spel in karakteristieke functievorm.*
- c. *Indien de spelboom  $L$  knopen heeft, dan zijn er  $L$  deelspelen.*
- d. *Normalisatie leidt tot een nulsomspel.*
- e. *Een terugwaartse-inductie-multi-strategie hoeft geen nash-evenwicht te zijn.*

**Opgave 40** *Beschouw een eindig combinatorisch spel onder de misère-spelregel. Toon aan, door het gegeven algoritme aan te passen, dat ook zo'n spel een waarde heeft.*

**Opgave 41** *Beschouw het luciferspel uit § 3.4. Analyseer de volgende varianten van dit spel:*

- a. 60 lucifers in begin 1, 2, 3 of 4 lucifers bij elke zet wegpakken.
- b. 100 lucifers en 1, 3 of 4 lucifers bij elke zet wegpakken.
- c. Als b, maar nu wint degene die het laatst zet.

**Opgave 42** *Beschouw het volgende luciferspel tussen twee spelers. Op een hoopje liggen 100 lucifers. Om de beurt nemen de spelers 1, 3 of 4 lucifers weg. Degene die het laatste iets wegneemt, heeft gewonnen. Ga na of de volgende beweringen waar of onwaar zijn.*

- a. Het aantal mogelijke eerste zetten van speler 1 is 8.
- b. Speler 1 heeft een winnende strategie.
- c. Als speler 1 bij zijn eerste zet 3 lucifers wegneemt, dan kan speler 2 winnen.

**Opgave 43** *Laat zien dat boter-kaas-en-eieren, nim, hex en schaken voorbeelden zijn van eindige strikt competitieve spelen. Zijn het ook eindige combinatorische spelen?*

**Opgave 44** *Laat zien dat in een nimspeel het aantal mogelijke optimale eerste zetten vanuit een oneven positie in de bijhorende tweetallige optelling gelijk is aan het aantal enen in de meest linkse kolom met een oneven aantal enen; in het bijzonder is dat aantal altijd oneven.*

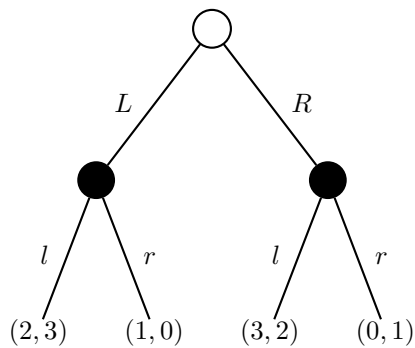
**Opgave 45** *We bekijken het volgende spel tussen twee spelers die over een zeer grote collectie dubbeltjes<sup>96</sup> beschikken. Om de beurt, te beginnen met speler 1, moeten de spelers een dubbeltje leggen op een grote cirkelschijf. Een partij eindigt als één der spelers geen dubbeltje meer geheel op de schijf kan plaatsen (doordat er geen ruimte meer vrij is, en verschuiven van dubbeltjes mag natuurlijk niet). Deze speler betaalt dan 1 Euro aan zijn tegenstander.*

- a. Laat zien dat dit spel geen eindig strikt competitief spel is.
- b. Heeft het spel een waarde? Zo ja, welke en geef een winnende strategie voor de winnaar.

**Opgave 46** *Beschouw het spel in uitgebreide vorm gegeven door de spelboom:*

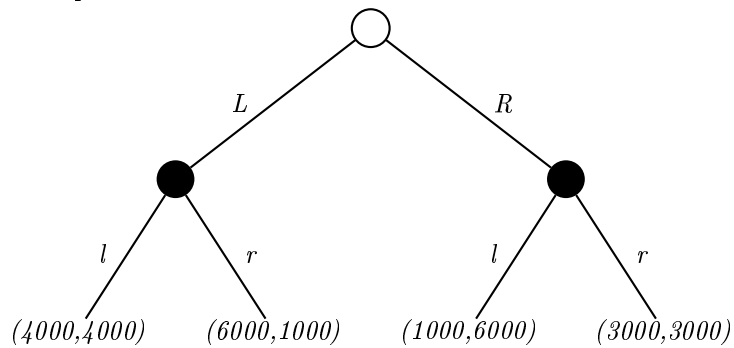
---

<sup>96</sup>Dat betreft een muntje dat tot 2002 in omloop was.



- Bepaal een normale vorm van dit spel.
- Bepaal de dominante strategieën. Ga na of deze strategieën zelfs strikt dominant zijn.
- Bepaal de nash-evenwichten.
- Bepaal de deelspelperfecte nash-evenwichten.

**Opgave 47** Beschouw het spel in uitgebreide vorm met twee spelers gegeven door de spelboom



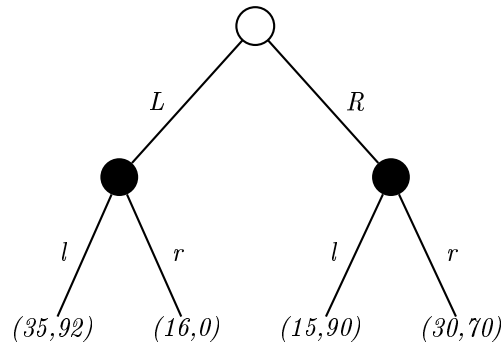
- Bepaal een normale vorm van dit spel.
- Bepaal de dominante strategieën. Ga na of deze strategieën zelfs strikt dominant zijn.
- Bepaal de nash-evenwichten.
- Bepaal de deelspelperfecte nash-evenwichten.

**Opgave 48** Beschouw het spel in uitgebreide vorm met 3 spelers gegeven door de spelboom in Figuur 3.1. Zijn de volgende beweringen waar of onwaar?

- Elke gereduceerde strategie is een strategie.
- Dit spel heeft precies 2 deelspelen.

- c. De speler ■ doet de derde zet in het spel.
- d. Het deelspel beginnend bij ● heeft twee nash-evenwichten.
- e. In een multi-strategie die een deelspelperfect nash-evenwicht is, heeft speler ○ de strategie L.

**Opgave 49** Beschouw het spel in uitgebreide vorm gegeven door de spelboom

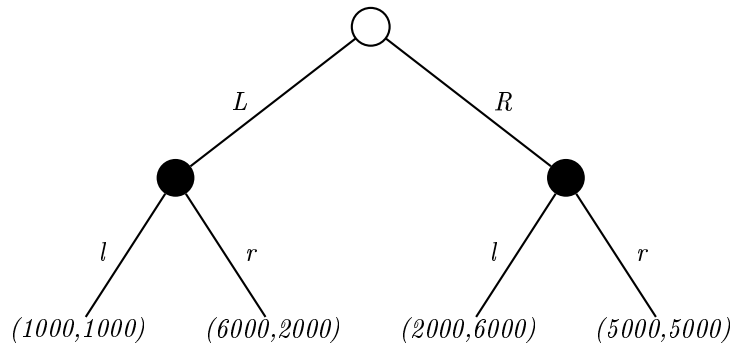


- a. Bepaal een normale vorm van dit spel.
- b. Bepaal de dominante strategieën. Ga na of deze strategieën zelfs strikt dominant zijn.
- c. Bepaal de nash-evenwichten.
- d. Bepaal de deelspelperfecte nash-evenwichten.

**Opgave 50** Beschouw het granaatspel uit § 1.3.

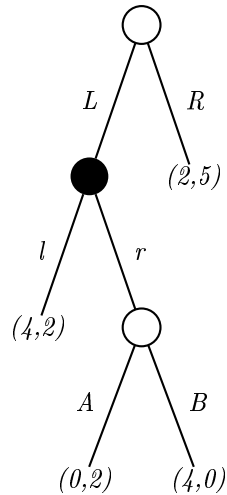
- a. Teken voor dit spel de spelboom.
- b. Geef een normale vorm.
- c. Bepaal de sterk gedomineerde strategieën
- d. Laat zien dat de strategie van speler 1 “Ik geef 10.000 Euro aan speler 2” en de strategie van speler 2: “Als speler 1 me geen 10.000 Euro geeft, dan breng ik een granaat tot ontploffing (en slechts dan)”, leidt tot een multi-strategie die een nash-evenwicht is. Laat zien dat dit nash-evenwicht niet deelspelperfect is.
- e. Laat zien dat de strategie van speler 1 “Ik geef 0 Euro aan speler 2” en de strategie van speler 2: “Ik breng de granaat nooit tot ontploffing” een deelspelperfect nash-evenwicht is.
- f. Zijn er nog andere nash-evenwichten dan die uit c en d?

**Opgave 51** Beschouw het spel in uitgebreide vorm tussen twee spelers gegeven door de spelboom



- Bepaal een normale vorm dit spel.
- Bepaal de dominante strategieën. Ga na of deze strategieën zelfs strikt dominant zijn.
- Bepaal de nash-evenwichten.
- Bepaal de deelspelperfecte nash-evenwichten.
- Bepaal de nash-evenwichten van het spel in d.

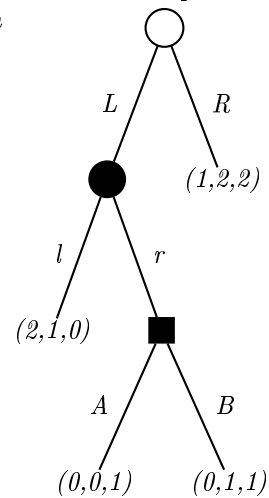
**Opgave 52** Beschouw het volgende spel in uitgebreide vorm met twee spelers gegeven door de spelboom



- Hoeveel deelspelen, en welke, heeft dit spel?
- Hoeveel strategieën, en welke, heeft speler 1? Hoeveel strategieën, en welke, heeft speler 2?
- Geef een volledig uitgewerkt speelplan voor speler 1 dat geen strategie is.

- d. Bepaal een normale vorm van dit spel.
- e. Bepaal voor elke speler de dominante en strikt dominante strategieën?
- f. Bepaal alle nash-evenwichten.
- g. Geef een nash-evenwicht in gemengde strategieën.
- h. Bepaal alle deelspelperfecte nash-evenwichten.

**Opgave 53** Bepaal de deelspelperfecte nash-evenwichten van het spel in uitgebreide vorm met 3 spelers gegeven door de spelboom



**Opgave 54** Wat vindt  $U$  van de volgende definitie van waarde voor een spel in uitgebreide vorm met  $n$  spelers?  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  heet “waarde” als elke speler  $i$  een strategie heeft die hem tenminste  $w^i$  oplevert.

**Opgave 55** a. Laat zien dat de volgende omschrijving geen welgedefinieerd uitgewerkt speelplan voor speler 1 in het boter-kaas-eieren spel voorstelt. Eerste zet: 5. Voor elke volgende zet, zet in tegenovergesteld hokje van laatste eigen zet en als dat niet kan zet kloksgewijs naast de laatste zet van de tegenstander.

b. Geef een volledig uitgewerkt speelplan voor speler 1 waarmee hij nooit verliest.<sup>97</sup>

**Opgave 56** Kan een volledig uitgewerkt speelplan van speler 1 bij boter-kaas-en-eieren dat die speler tenminste gelijk spel garandeert, inhouden dat het gelijkspel wordt als speler 2 een volledig uitgewerkt speelplan hanteert dat die speler niet tenminste gelijkspel garandeert?

**Opgave 57** Beschouw boter-kaas-en-eieren (met de standaardnummering van de hokjes).

<sup>97</sup>Zo'n volledig uitgewerk speelplan bestaat ook voor speler 2, maar dat is wat moeilijker om overtuigend op te schrijven.

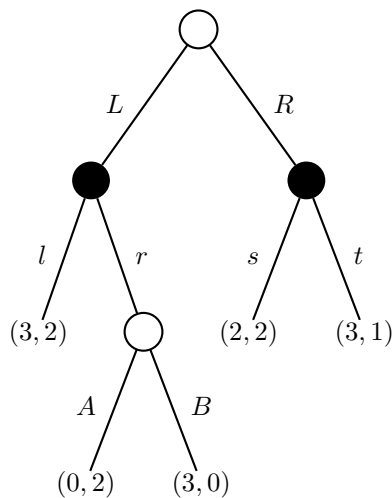
a. Laat zien dat als speler 1 het volgende uitgewerkte speelplan gebruikt, het mogelijk is dat hij verliest:

Eerste zet in 5. Elke volgende zet volgens de eerste beschrijving in de volgende lijst die van toepassing is: (1) Laagste nummer in zelfde rij waarin tegenstander laatste zet deed. (2) Laagste nummer in zelfde kolom waarin tegenstander laatste zet deed. (3) Laagste nummer.

b. Bewijs dat het spel een deelspel-perfect nash-evenwicht heeft.

c. Laat zien dat de waarde van boter-kaas-en-eieren gelijkspel is.

**Opgave 58** Beschouw de volgende spelboom



a. Hoeveel deelspelen en welke heeft dit spel?

b. Hoeveel strategieën heeft speler 1? En speler 2?

c. Geef een volledig uitgewerkt speelplan dat geen strategie is.

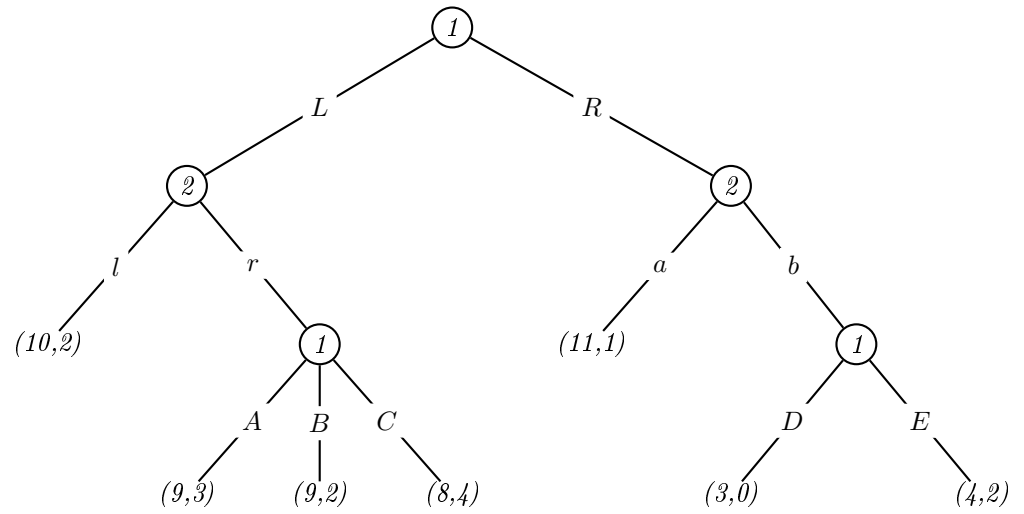
d. Bepaal een normale vorm voor dit spel.

e. Bepaal voor elke speler de dominante en strikt dominante strategieën.

f. Bepaal de Nash evenwichten.

g. Bepaal de deelspel perfecte Nash evenwichten.

**Opgave 59** Bepaal de deelspel perfecte evenwichten van het volgende boomspel:





## Hoofdstuk 4

# Oligopolies

In dit hoofdstuk houden we ons bezig met diverse oligopoliespelen en zo met speciale voorbeelden van spelen in strategische en uitgebreide vorm. Mede voor de volledigheid bekijken we in § 4.2 ook het monopolie dat speltheoretisch de ontaarde situatie van een spel met één speler betreft.

Ook dit hoofdstuk behoort tot het *softe* deel van het typoscript en is daarmee niet wiskundig rigoureuus. Opgemerkt zij dat het verkrijgen van wiskundig rigoureuze resultaten voor oligopolies, bijvoorbeeld die over existentie en uniciteit van Cournot-evenwichten, een soort specialisme *an sich* schijnt te zijn waar sommige wetenschappers een flink deel van hun leven mee bezig waren/zijn.

Als de lezer bekend is met micro-economische noties zoals artikel, prijs, marktform, winst, kostenfunctie, marktvaagfunctie, prijs-vraag-relatie, winst-maximalisatie en elasticiteit dan is dat mooi meegenomen, maar nodig is dat niet.

### 4.1 Classificatie

Oligopolies behelzen marktvormen voor artikels. Kenmerkend voor een oligopolie is dat er een klein aantal winstmaximaliserende producenten van een artikel zijn,<sup>98</sup> en wel zó klein dat elk van hen marktmacht heeft, i.e. zo klein dat elk van hen (directe) invloed op de prijs van het artikel heeft. Een marktform waar er subjecten met marktmacht zijn heet imperfect; een oligopolie betreft dus een imperfecte marktform. Verder zijn er een groot aantal individueel opererende kopers die de prijs niet direct beïnvloeden kunnen. In zekere zin kan er door het geringe aantal producenten een bijzondere vorm van onzekerheid ontstaan: een actie van een van de producenten heeft invloed op de (winst van de) andere producenten die op verschillende manieren daarop kunnen reageren. Men kan zeggen dat een oligopolistische markt tussen twee uitersten in ligt, namelijk tussen volledige concurrentie en monopolie.

---

<sup>98</sup>Lees eventueel "verkopers" in plaats van "producenten". Voor het productieaspect *an sich* zal hier geen aandacht zijn.

Een classificatie van oligopolies kan gebaseerd worden op de vraag of de artikels die de producenten verkopen voor de kopers homogeen of heterogeen zijn;<sup>99</sup> men spreekt dan van homogeen oligopolie respectievelijk van heterogeen oligopolie. Bij alle oligopolies die wij verder bekijken zullen we aannemen dat de artikels homogeen zijn; dat is doorgaans namelijk het meest eenvoudige geval. Een andere classificatie kan gebaseerd worden aan de hand van de natuur van de acties van de producenten. Deze onderscheidt men doorgaans in prijs-acties of hoeveelhedsacties en in simultane of sequentiële acties. We spreken van een prijsactie indien de producent de prijs bepaalt en “de markt” de daarbij horende hoeveelheid bepaalt die hij zal verkopen. En van een hoeveelhedsactie indien de producent de hoeveelheid die hij verkopen wil bepaalt en “de markt” de daarbij horende prijs waarvoor dat plaats zal vinden bepaalt. We spreken van simultane acties als alle producenten tegelijkertijd hun acties ondernemen en van sequentiële acties als de producenten de een na de ander een actie ondernemen. In het speciale geval van twee producenten waar eerst een der producenten een actie onderneemt en daarna de ander, noemt men de producent die als eerste een actie onderneemt de leider en de andere de volger. Combinatie van bovenstaande typen van acties leidt tot de volgende oligopolietypen:

	<b>prijs</b>	<b>hoeveelheid</b>
<b>simultaan</b>	Bertrand-	Cournot-
<b>sequentieel</b>	Prijsleiderschap-	Von-Stackelberg-

De producenten worden in oligopolistische modellen in het bijzondere gekenmerkt door hun kostenfuncties. De markt op zijn beurt weerspiegelt zich in de prijs-vraag-relatie, die op haar beurt het gedrag van de vragers weerspiegelt.

## 4.2 Monopoliespel

Beschouwen we de markt van een (homogeen) artikel waarvoor er één producent is, monopolist<sup>100</sup> geheten, er veel kopers zijn en de monopolist een prijszetter is, dus zelf de prijs van dat artikel bepaalt. De motivatie van de monopolist is winstmaximalisatie. Prijsvorming van het artikel wordt gemodelleerd middels een marktvaartfunctie

$$Q(p)$$

met de volgende interpretatie: de monopolist wordt voor elke door hem zelf te kiezen positieve prijs  $p$  van het artikel geconfronteerd met een vraag  $Q(p)$  van de consumenten naar dat artikel. Dat impliceert dat voor prijs  $p$  niet meer dan

<sup>99</sup>Indien een subject elk artikeltype uit een klasse als hetzelfde beschouwt, dan spreekt men van homogene artikeltypen voor dat subject en anders van heterogene artikeltypen. Het laten knippen van haren bijvoorbeeld waar men ook nog tijdens het knippen naar een videofilm kan kijken en een kopje koffie met een kaakje krijgt is voor veel subjecten een ander artikeltype dan louter het knippen.

<sup>100</sup>Marx ziet monopolisten als typisch voor een van de laatste stadia van het kapitalisme.

een hoeveelheid  $Q(p)$  verkopen kan. Verder nemen we aan dat een hoeveelheid  $q$  van het artikel

$$\mathcal{C}(q)$$

kost.<sup>101</sup> We maken de gebruikelijke veronderstelling dat de marktvraagfunctie  $Q$  dalend en de kostenfunctie  $\mathcal{C}$  stijgend is. Duiden we nog (aannemende dat dat kan) met

$$P(q)$$

de inverse van  $Q(p)$ , i.e. de inverse marktvraagfunctie, aan. Naar  $P$  verwijzen we ook wel als prijs-vraag-relatie.

Merk op dat voor de monopolist slechts bepaalde combinaties van prijzen die hij kan zetten en hoeveelheden die hij kan verkopen in aanmerking komen. Als de monopolist namelijk een zekere hoeveelheid wil verkopen, dan kan hij dat slechts doen voor een prijs waarbij de marktvaart tenminste gelijk aan die hoeveelheid is. I.e. als hij  $q$  wil verkopen dan kan hij dat doen voor elke prijs  $p$  tussen 0 en  $P(q)$ . Als  $q$  en  $p$  dusdanig zijn, dan is zijn winst gelijk aan  $pq - \mathcal{C}(q)$  hetgeen als functie van  $p$  maximaal voor  $p = P(q)$  is. Opbrengst minus kosten vormend leidt dat tot een winst ter grootte

$$\check{\Pi}(q) = P(q)q - \mathcal{C}(q).$$

We noemen de functie  $\check{\Pi}$  de secundaire winstfunctie.<sup>102</sup>

In reële-wereld-bewoordingen luidt het winstmaximalisatieprobleem van de monopolist: gegeven een marktvraagfunctie  $Q$  en een kostenfunctie  $\mathcal{C}$ , bepaal de te verkopen hoeveelheden  $q$  die de secundaire winstfunctie  $\check{\Pi}$  maximaliseren. Zo'n hoeveelheid noemen we ook wel optimale hoeveelheid, de erbij horende prijs optimale prijs en de erbij horende winst de maximaal haalbare winst.

Omdat  $\check{\Pi}$  een functie van één variabele is, als alles even meezit, er een unieke optimale hoeveelheid en kan deze gevonden worden als het unieke nulpunt van de afgeleide van de winstfunctie. Met

$$R(q) := P(q) \cdot q,$$

de opbrengstfunctie, leidt dit tot

$$\check{\Pi}'(q) = R'(q) - \mathcal{C}'(q) = 0$$

en dus tot het volgende recept voor de optimale hoeveelheid, welke we nog Monopolieregel noemen:

(Monopolieregel.) Men losse de volgende vergelijking in de onbekende  $q$  op:  $P'(q)q + P(q) = \mathcal{C}'(q)$ .

<sup>101</sup>Merk op dat de kostenfunctie slechts van  $q$  afhangt en dus de prijzen van de productiefactoren als vast beschouwd worden en reeds in  $\mathcal{C}$  verwerkt zijn.

<sup>102</sup>Er bestaat ook een primaire winstfunctie. Dat is de functie die de winst weergeeft in termen van de productiefactorhoeveelheden. Daarmee werken we hier niet.

Dus in de optimale hoeveelheid is de marginale opbrengst gelijk aan de marginale kosten. De optimale prijs vindt men door de optimale hoeveelheid in de inverse marktvaagfunctie  $P$  in te vullen en de maximaal haalbare winst door de optimale hoeveelheid in  $\check{\Pi}$  in te vullen.

Duid met  $\eta^P$  de elasticiteit van  $P$  aan, i.e.  $\eta^P = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P}$ . Opmerkend dat  $R'(q) = P'(q)q + P(q)$  en dat volgens de Monopolieregel voor een optimale hoeveelheid  $q$  er  $C'(q) = R'(q)$  geldt, volgt dat in zo'n optimale hoeveelheid

$$m := \frac{P - C'}{P} = -\eta^P. \quad (4.1)$$

Omdat  $-\eta^P$  positief is, impliceert dit:

De optimale prijs is hoger dan de marginale kosten bij de optimale hoeveelheid en in die hoeveelheid geldt  $|\eta^P| < 1$ .<sup>103</sup>

Het getal  $m$  hierboven heet nog de monopoliegraad van Lerner.<sup>104</sup> In het algemeen: als we een producent in een of andere marktform voor een artikel hebben, dan heeft het doorgaans zin om in het marktevenwicht van die marktform (die aanleiding geeft tot een evenwichtsprijs en evenwichtshoeveelheid voor dat artikel) de monopoliegraad van Lerner door bovenstaande formule te definiëren.<sup>105</sup>

Laten we even even ingaan op niet zo wenselijke verschijnselen die zich kunnen voordoen bij berekeningen aan monopolies. Bekijken we daartoe eens het monopolie voor  $Q(p) = p^{-2}$  en  $C(q) = \frac{1}{2}\sqrt{q}$ . Dan is  $P(q) = \frac{1}{\sqrt{q}}$  waaruit  $\check{\Pi}(q) = \frac{1}{2}\sqrt{q}$ . We zien dat er geen (eindige) optimale hoeveelheid is. Dus het winstmaximalisatieprobleem hoeft geen oplossing te hebben. Een ander niet zo wenselijk verschijnsel is dat de maximaal haalbare winst negatief kan zijn. Maar als  $C(0) = 0$  kan dat niet omdat dan  $\check{\Pi}(0) = P(0) \cdot 0 - C(0) = 0$ . Verder kan dit verschijnsel ook niet optreden als de marktvaag bij een prijs die gelijk aan de minimale gemiddelde kosten is groter is dan de hoeveelheid waar die kosten minimaal zijn. In een formule: als  $Q(p^0) > q^0$ . Inderdaad:  $Q(p^0) > q^0$  geeft (omdat  $P$  dalend is)  $P(q^0) > p^0$ . Omdat  $\frac{C(q^0)}{q^0} = p^0$  volgt  $\check{\Pi}(q^0) = P(q^0)q^0 - C(q^0) > p^0q^0 - C(q^0) = 0$ , zoals gewenst.

In overeenstemming met de dalendheid van  $P$  veronderstellen we nu verder dat  $P' < 0$  is. Bekijken we nu eens de vergelijkingen

$$P'(q)q + P(q) = C'(q);$$

$$P(q) = C'(q).$$

Stel  $q_m (> 0)$  is de oplossing van de eerste en  $q_v$  die van de tweede. Met

$$I(q) := P(q) - C'(q)$$

<sup>104</sup>Synoniem: winstmargefactor.

<sup>105</sup>Voor de marktform van volledige concurrentie geldt volgens de Prijs-is-marginale-kostenregel  $P = C'$  en is de monopoliegraad van Lerner dus nul.

geldt dan

$$I(q_v) = 0, I(q_m) = -P'(q_m)q_m > 0.$$

Als we nog weten dat  $C'' \geq 0$  is, dan is  $I' < 0$  en dus  $I$  strikt dalend. Dan volgt nog

$$q_v > q_m.$$

Tenslotte bekijken we nogmaals het winstmaximalisatieprobleem in meer detail. Daartoe allereerst het volgende precieze resultaatje. Stel  $A$  en  $B$  zijn niet-lege deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$  en  $P : A \rightarrow B$  is een bijectie. Zij  $P^{<-1>} : B \rightarrow A$  de inverse van  $P$ . We noteren  $P^{<-1>}$  ook wel met  $Q$ . De elementen in  $A$  duiden we ook wel aan met  $q$  en die in  $B$  met  $p$ . Dus  $P \circ Q = \text{Id}$  en  $Q \circ P = \text{Id}$ . Verder zij gegeven een functie  $C : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Definieer  $\Pi : A \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$\Pi(q) := P(q)q - C(q)$$

en definieer  $\check{\Pi} : B \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$\check{\Pi}(p) := pQ(p) - C(Q(p)).$$

Hier is het resultaat waar het ons om gaat:

Als  $q_*$  een maximaliseerder van  $\Pi$  is, dan is  $P(q_*)$  een maximaliseerder van  $\check{\Pi}$  en  $\Pi(q_*) = \check{\Pi}(P(q_*))$ .

Als  $p_*$  een maximaliseerder van  $\check{\Pi}$  is, dan is  $Q(p_*)$  een maximaliseerder van  $\Pi$  en  $\check{\Pi}(p_*) = \Pi(Q(p_*))$ .

Bewijs: er geldt  $\check{\Pi}(P(q_*)) = P(q_*)Q(P(q_*)) - C(Q(P(q_*))) = P(q_*)q_* - C(q_*) = \Pi(q_*)$ . Dus de tweede bewering geldt. De eerste bewering volgt als we kunnen laten zien dat  $\check{\Pi}(p) \leq \Pi(q_*)$  ( $p \in B$ ). En dat kunnen we: fixeer  $p \in B$ . Omdat  $p = P(Q(p))$  volgt  $\check{\Pi}(p) = pQ(p) - C(Q(p)) = P(Q(p))Q(P(Q(p))) - C(Q(P(Q(p)))) = P(Q(p))Q(p) - C(Q(p)) = \Pi(Q(p)) \leq \Pi(q_*)$ . Dus de eerste bewering geldt. De overige twee worden net zo bewezen.

Voorbeeld:  $A = B = \mathbb{R}_{++}$ ,  $P(q) = q^{-1/2}$  en  $C(q) = q^2$ . Nu geldt  $Q(p) = p^{-2}$ ,  $\Pi(q) = \sqrt{q} - q^2$  en  $\check{\Pi}(p) = p^{-1} - p^{-4}$ . Verder heeft  $\Pi$  als unieke maximaliseerder  $4^{-2/3}$  en  $\check{\Pi}$  heeft als unieke maximaliseerder  $4^{1/3} = P(4^{-2/3})$ .

Deze eenvoudige wiskundige exercitie leidt tot de volgende opmerking die van belang kan zijn voor economen: in een standaard monopolie-model waar de marktvaagfunctie  $Q$  inverteerbaar is, doet het er (wellicht) niet toe of men met deze vaagfunctie of met haar inverse werkt. Reden voor deze opmerking is het volgende. In de reële wereld zijn de acties waarmee monopolisten zich aan de consumenten presenteren doorgaans prijsacties: U lope maar langs een monopolistische winkel en lette daar op het prijskaartje wat aan het goed hangt. Deze opmerking kan ertoe leiden dat men werken met  $\check{\Pi}$  preferereert boven dat met  $\Pi$ . Maar werken met  $\check{\Pi}$  is ingewikkelder vanwege de term  $C(Q(p))$ .

Dat men enigszins voorzichtig moet zijn met het geven van reële-wereld-interpretaties aan  $\check{\Pi}$  toont de volgende vraag van Pietje Puk, aan. Kan men redelijkerwijs aan  $\check{\Pi}(p)$  de volgende reële-wereld-interpretatie kan geven?  $\check{\Pi}(p)$  is de maximale winst die de monopolist kan behalen als hij een prijs  $p$  voor zijn goed vraagt. Welnu helpen we hem: aannemende dat  $Q$  strikt dalend is, kan de monopolist als hij een zekere prijs  $p$  wil vragen deze prijs verkrijgen voor elke hoeveelheid  $q$  tussen 0 en  $Q(p)$  (omdat hij die hoeveelheid moet kunnen verkopen). Als  $q$  en  $p$  dusdanig zijn, dan is zijn winst gelijk aan  $pq - C(q)$ . De maximale winst die hij kan behalen is dus  $\max_{q \in [0, Q(p)]} pq - C(q)$ . Dat er gevallen zijn waarvoor die winst niet gelijk is aan  $\check{\Pi}(p)$  zien we door  $p = 3$  te nemen in het geval waar  $Q(p) = p^{-1}$ ,  $C(q) = 7q$  is. Dan  $\check{\Pi}(3) = 1 - 7/3$ . En  $\max_{q \in [0, 1/3]} 3q - 7q = 0$ . Maar voor prijzen  $p$  groter dan 7 doet dat euvel zich niet voor, zoals men vlug nagaat.

**Opgave 60** *Toon aan dat de optimale prijs een stijgende functie van de marginale kosten is door te laten zien dat  $p_1 < p_2$  is als  $p_i$  de optimale prijs bij  $C_i$  is en  $C'_1 < C'_2$  is.*

### 4.3 Oligopolies

Beschouwen we nu  $n$  winstmaximaliserende producenten die een (homogeen) artikel produceren en dat artikel tegelijkertijd op de markt brengen. Daarbij wordt de prijs van dat artikel bepaald door een prijs-vraag-relatie  $P$ .<sup>106</sup> Laten we de producenten aanduiden met  $1, \dots, N$ . De inverse markt-vraagfunctie is bij deze markt vorm als volgt nader te interpreteren: als producent  $i$  een hoeveelheid  $q^i$  aanbiedt, dan bieden de producenten samen de hoeveelheid  $Q = q^1 + \dots + q^n$  op de markt aan, verkopen deze hoeveelheid, en wordt  $P(Q)$  de prijs van het artikel. Verder zij  $C^i$  de kostenfunctie van producent  $i$ .

Bovenstaande leidt tot de volgende specificatie van de secundaire winstfunctie van producent  $i$  in het cournot-oligopolie:<sup>107</sup>

$$\check{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n) = P(q^1 + \dots + q^n)q^i - C^i(q^i).$$

We zien dat de winst van een producent niet alleen van zijn eigen actie afhangt

<sup>106</sup>Merk op dat we hier van meet af aan met  $p$  in plaats van met  $Q$  werken.

<sup>107</sup>Antoine Cournot (1801-1877), Fransman, wiskundige, filosoof, economist en universiteitsbeheerder. Hij was de eerste die een vraag-prijs-relatie beschouwde en bovendien de eerste die calculus gebruikte om economische problemen mee op te lossen. Verrichtte bijvoorbeeld baanbrekend werk op het terrein van het oligopolie en monopolie terwijl in zijn dagen velen slechts het beeld van volkomen mededinging voor ogen hadden. En al lang voor bijvoorbeeld Walras dacht hij aan een algemene evenwichtstheorie. Kan als de grondlegger van de mathematische economie beschouwd worden. Doordat zijn boek "Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses" Cournot (1838) dat hij in 1838 publiceerde en zijn tijd ver vooruit was, niet goed ontvangen werd, vooral vanwege het wiskundige karakter, verliet hij voor 25 jaar de economie. Daarna publiceerde hij een boek dat minder wiskundig van aard was om te bereiken dat hij meer gelezen zou worden, maar waarschijnlijk ook omdat hij langzaam aan blind werd.

maar ook van die van zijn concurrenten.<sup>108</sup> Merk op dat als een van de producenten zijn hoeveelheid vergroot dat dan de prijs van het artikel waarvoor het verkocht wordt (voor alle producenten) daalt. Merken we ook op dat, vanwege de dalendheid van  $P$ , voor elke vaste hoeveelheid die de ene producent op de markt brengt, de winst van die producent een dalende functie is van de hoeveelheid die de andere producent op de markt brengt.

Omdat de winst van een producent niet alleen van zijn eigen actie afhangt maar ook van die van zijn concurrenten is het niet duidelijk wanneer men in deze situatie nu ervan kan spreken dat de winst maximaal is. Dat is vervelend want nu hebben we aan winstmaximalisatie niet genoeg om het gedrag van de producenten mee te analyseren. Toch kan men een redelijk oplossingsconcept aangeven door het nash-evenwichts-oplossingsconcept erbij te halen. Wat men dus doet is het zoeken naar een multi-actie  $(q^1, \dots, q^n)$  zodanig dat in deze situatie het zich voor geen der producenten loont om als enige af te wijken: zo'n multi-actie heet cournot-evenwicht en de bijbehorende prijs heet cournot-evenwichtsprijs.

Reeds vertrouwd zijnde met spelen in strategische vorm zien we dat het cournot-oligopolie gezien kan worden als een dusdanig spel. Het cournot-evenwicht is niks anders dan het nash-evenwicht van dat spel. Vandaar ook wel het synoniem cournot-nash-evenwicht voor cournot-evenwicht. Preciezer: de spelers corresponderen met de producenten, elke speler  $i$  heeft als strategieverzameling  $[0, \infty)$ , een strategie van speler  $i$  correspondeert met een hoeveelheid  $q^i$  die speler  $i$  op de markt brengt en daar verkoopt en de uitbetalingsfunctie  $f^i$  van speler  $i$  is gelijk aan  $f^i(q^1, \dots, q^n) = P(q^1 + \dots + q^n)q^i - C^i(q^i)$  i.e. is gelijk aan zijn secundaire winstfunctie.

Omdat een cournot-evenwicht een nash-evenwicht is, hebben we gezien dat als alles even meezit het een cournot-evenwicht zijn we, volgens (2.1) vertalen kunnen in  $\frac{\partial \tilde{\Pi}^i}{\partial q^i} = 0$ . Uitwerken daarvan leidt tot:

(Cournotregel.) Men bepale de oplossing van de volgende  $n$  vergelijkingen in de  $n$  onbekenden  $q^1, \dots, q^n$ :

$$P'(q^1 + \dots + q^n)q^i + P(q^1 + \dots + q^n) - C'(q^i) = 0 \quad (1 \leq i \leq N).$$

Eenmaal het cournot-evenwicht gevonden hebbende, vindt men de cournot-evenwichtsprijs door invullen van het cournot-evenwicht in  $P(Q)$ .

Zoals tegen elk nash-evenwicht kunnen we ook tegen een cournot-evenwicht aankijken middels beste-antwoord-correspondenties, die men echter in de economie meestal functie!reactie noemt.<sup>109</sup> Laten we dat hier nog eens even expliciet voor de context in kwestie uitleggen. Beschouw de (secundaire) winstfunctie  $\tilde{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n)$  van producent  $i$  als functie van  $q^i$  bij vaste grootten van de overige  $q^j$ 's. Producent  $i$  kan nu de  $q^i$  bepalen die zijn winst maximaliseert. Deze

<sup>108</sup>Het model van homogeen oligopolie is te generaliseren tot heterogeen oligopolie door meerdere prijs-vraag-relaties te introduceren.

<sup>109</sup>daarbij er stilzwijgend vanuit gaan dat de correspondentie singletonwaardig is.

$q^i$  zal afhangen van de grootte van de overige  $q^j$ 's. Op die manier is er, als alles even meezit, een (functioneel) verband tussen  $q^i$  en die overige  $q^j$ 's dat we met  $R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n)$  aan zullen geven;  $R^i$  is de reactiefunctie van producent  $i$ . Kortom:

$R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n)$  maximaliseert de functie  $\check{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n)$   
als functie van de hoeveelheid  $q^i$  bij gegeven overige hoeveelheden.

Dit leidt tot: men bepale de oplossing van de volgende  $n$  vergelijkingen in de  $n$  onbekenden  $(q^1, \dots, q^n)$

$$q^i = R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n) \quad (1 \leq i \leq n).$$

In het bovenstaande is de notie van cournot-evenwicht uitgelegd, maar is voorbijgegaan aan de vraag hoe een cournot-evenwicht tot stand zou kunnen komen. We gaan nu uitleggen hoe men, voor het gemak in de context van het duopolie, uitgaande van de reactiefuncties dynamisch gedrag kan introduceren. Daartoe nemen we aan dat we met discrete tijd te maken hebben:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Uitgaande van een beginsituatie  $q^1(0), q^2(0)$  zetten we voor  $t \geq 0$  vervolgens

$$q^1(t+1) = R^1(q^2(t)), \quad q^2(t+1) = R^2(q^1(t)),$$

waar  $R^i$  de reactiefunctie van producent  $i$  voorstelt. Dus in periode 0 brengt producent 1 een hoeveelheid  $q^1(0)$  en producent 2 een hoeveelheid  $q^2(0)$  de markt, in periode 1 brengt producent 1 een hoeveelheid  $q^1(1) = R^1(q^2(0))$  en producent 2 een hoeveelheid  $q^2(1) = R^2(q^1(0))$  op de markt. In periode 2 brengt producent 1 een hoeveelheid  $q^1(2) = R^1(q^2(1))$  en producent 2 een hoeveelheid  $q^2(2) = R^2(q^1(1))$  op de markt, et cetera. Men kan dit als volgt interpreteren: de producenten leren nooit van de opgedane ervaringen, maar nemen bij de bepaling van de optimale actie in elke periode aan dat de andere producent zijn hoeveelheid van de vorige periode op de markt zal brengen. Het spreekt voor zich dat dit op zijn minst naïef gedrag genoemd kan worden, als men al niet van dom gedrag spreken mag.

De hier gevolgde manieren om dynamica te introduceren hoeven zich niet te beperken tot cournot-oligopolies, maar kan veel algemener voor spelen in strategische vorm die wel-gedefinieerde reactiefuncties hebben. Het nash-evenwichtskoncept is dus ondanks zijn "statische definitie" niet helemaal ontbloot van dynamica. Het probleem met dit soort van dynamica in het algemeen is dat deze lang niet altijd reëel gedrag beschrijft.

Bekijken we nu even kartels. Dat betreft de situatie waar de producenten gaan samenspannen en samenwerken om de totale winst te maximaliseren. Een kartel heeft veel weg van een monopolie. We geraken van bovenstaand cournot-oligopolie-model tot een kartel door één beslisser in te voeren die beslist hoe alle producenten ageren. Deze beslisser heeft dus zeggenschap over de multi-actie  $(q^1, \dots, q^n)$ . De secundaire winstfunctie van het kartel is

$$\check{\Pi}_{\text{kartel}}(q^1, \dots, q^n) = P(q^1 + \dots + q^n)(q^1 + \dots + q^n) - (C^1(q^1) + \dots + C^n(q^n)),$$



dat is de som der secundaire winstfuncties van alle producenten. Een multi-actie  $(q^1, \dots, q^n)$  die de secundaire winstfunctie  $\check{\Pi}(q^1, \dots, q^n)$  maximaliseert heet kartelevenwicht en de bijbehorende prijs heet kartelevenwichtsprijs. In speltheoretische termen is een kartelevenwicht dus niets anders dan een volledig coöperatieve multi-strategie. Eenmaal het kartelevenwicht gevonden hebbende vindt men de kartelevenwichtsprijs door invullen van het kartelevenwicht in  $P(Q)$ . Als alles even meezit, dan voldoet een kartelevenwicht aan

$$\frac{\partial \check{\Pi}_{\text{kart}}}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N).$$

Daaruit:

(Kartelregel.) Men losse de volgende  $n$  vergelijkingen in de  $n$  onbekenden  $q^1, \dots, q^n$  op:  $P'(q^1 + \dots + q^n)(q^1 + \dots + q^n) + P(q^1 + \dots + q^n) = C^{i'}(q^i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Dat impliceert daarom het volgende resultaat:

In een kartelevenwicht zijn de marginale kosten van alle producenten aan elkaar gelijk.

Dus als  $(q^1, \dots, q^n)$  een kartelevenwicht is, dan is

$$C^{1'}(q^1) = \dots = C^{n'}(q^n). \quad (4.2)$$

Er bestaat bij een kartel de neiging om vals te spelen, i.e. om niet samen te spannen: in het kartel-evenwicht, kan elke producent zijn winst vergroten door meer te verkopen. In die zin is een kartel instabiel. Willen de kartelleden het kartel in stand houden, dan is het voor hen goed als men vals spelen kan detecteren (en bestraffen). In speltheoretische termen: een kartel-evenwicht is geen nash-evenwicht. We zullen dit hier nu laten zien door te laten zien voor producent  $i$  in een kartel-evenwicht  $\frac{\partial \check{\Pi}}{\partial q^i} > 0$  is. Welnu, in een kartel-evenwicht geldt  $P'(Q)Q + P(Q) = C^{i'}(q^i)$ . Daaruit  $\frac{\partial \check{\Pi}^i}{\partial q^i}(q) = P'(Q)q^i + P(Q) - C^{i'}(q^i) > P'(Q)Q + P(Q) - C^{i'}(q^i) = 0$ .

## 4.4 Van oligopolie naar volledige concurrentie

Het is evident dat een monopolie een speciaal geval van een oligopolie is: namelijk eentje met één producent. Minder evident is dat een oligopolie met heel veel producenten lijkt op volledige concurrentie.<sup>110</sup> Aardig is nu dat we het waarheidsgehalte van die bewering handig in kunnen zien middels de volgende speltheoretische analyse.

<sup>110</sup>Eigenlijk is er geen sprake meer van een "oligopolie" als er slechts één of veel producenten zijn. Maar niks belet ons natuurlijk deze situatie te analyseren.

Voor een cournot-oligopolie voor  $n = 1$ , i.e. in het geval van één producent wordt de conditie voor een cournot-evenwicht  $P'(q)q + P(q) = C'(q)$ , i.e. de Monopolieregel uit § 4.2. Dat is dus simpel. Ook het volgende best gewichtige resultaat geldt:

Als alles even meezit, dan tendeert een cournot-oligopolie waarbij het aantal producenten naar oneindig gaat naar volledige concurrentie.

Natuurlijk hangt dit “gewichtige resultaat” wel *au fond* nog in de lucht omdat het niet duidelijk is wat we ermee bedoelen. Om er betekenis aan te geven gaan we nu asymptotiek voor aantal producenten naar oneindig bedrijven. Beschouwen we dus maar eens een cournot-oligopolie met  $n$  producenten (waarvan we dadelijk de limiet van zekere objecten voor  $n \rightarrow \infty$  gaan nemen). Noteer  $Q = q^1 + \dots + q^n$ . Beschouw producent  $i$ . Zet  $s^i = q^i/Q$ ;  $s^i$  noemt men ook wel het marktaandeel (van producent  $i$ ). Voor vast aanbod  $q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n$  van de overige producenten, geldt, met  $q^i$  het optimale aanbod van producent  $i$  aanduidend, de formule van Amoroso-Robinson

$$P(1 + s^i \cdot \eta^P) = C^{i'},^{111} \quad (4.3)$$

waar  $\eta^P$  de vraagelasticiteit van de prijs is. Inderdaad. De winstfunctie van producent  $i$  is  $\tilde{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n) = P(q^1 + \dots + q^n)q^i - C^i(q^i)$ . Volgens de oligopolieregel geldt  $P'(q^1 + \dots + q^n)q^i + P(q^1 + \dots + q^n) - C^{i'}(q^i) = 0$ . Dus  $P'(Q)q^i + P(Q) = C^{i'}(q^i)$ . Oftewel

$P(Q) \left(1 + P'(Q) \frac{Q}{P(Q)} \frac{q^i}{Q}\right) = C^{i'}(q^i)$ . We hebben  $\eta^P(Q) = \frac{dP}{dq}(Q) \cdot \frac{Q}{P(Q)}$  en daarmee het gewenste resultaat.

Eenmaal (4.3) hebbend, gaan we bekijken wat we verder kunnen zeggen als producent  $i$  een klein deel bestrijkt van de markt, dat is als  $s^i \approx 0$ . In dat geval komt (4.3) neer op de bekende conditie “prijs is marginale kosten” voor volledige concurrentie, want in dat geval is  $P(Q) \approx C^{i'}(q^i)$ . Het aangekondigde resultaat waarom het ons te doen was volgt nu als het marktaandeel  $s^i$  naar 0 gaat als  $n$  naar oneindig gaat. En dat is inderdaad vaak het geval: als elke producent bijvoorbeeld dezelfde kostenfunctie heeft, dan is in het cournot-evenwicht  $q^1 = \dots = q$  en dus is elke  $s^i = 1/N$  hetgeen inderdaad naar nul gaat als  $n$  naar oneindig gaat. Als niet alle producenten dezelfde kostenfuncties hebben, dan geldt dezelfde conclusie als in het cournot-evenwicht de  $q^i$  niet al te veel van elkaar verschillen.

---

<sup>111</sup>In uitgebreide notatie:  $P(Q)(1 + s^i \eta^P(Q)) = C^{i'}(q^i)$ .

## 4.5 Von-stackelberg-duopolie-spel

We bekijken nu von-stackelberg-duopolies.<sup>112</sup> Dat betreft een duopoliemodel met twee producenten, verder met 1 en 2 aangeduid, waar producent 1 de leider en producent 2 de volger is. De kostenfunctie van producent  $i$  zij  $C^i$  en laat  $P$  de inverse marktvaagfunctie zijn. Het een leider zijn betekent dat deze als eerste een hoeveelheid  $q^1$  op de markt brengt en dat daarna pas de volger een hoeveelheid  $q^2$  op de markt brengt.

Dit duopoliemodel is op te vatten als een spel in uitgebreide vorm: eerst doet de leider een zet en vervolgens de volger. We gaan voor dat spel de terugwaartse-inductie-multi-strategieën bepalen. (We weten al dat elke terugwaartse-inductie-multi-strategie een nash-evenwicht is, zelfs een deelspelperfect nash-evenwicht.) Daartoe bekijken we eerst de reactiefunctie  $R^2$  van de volger. Deze geeft per definitie aan hoeveel de volger zal aanbieden als functie van wat de leider aangeboden heeft.  $R^2$  kan men bepalen door de secundaire winstfunctie  $\check{\Pi}^2(q^1, q^2) = P(q^1 + q^2)q^2 - C^2(q^2)$  van de volger te maximaliseren als functie van  $q^2$  voor vaste  $q^1$ . De leider, op de hoogte van de reactiefunctie van de volger, bepaalt nu zijn optimale hoeveelheid  $q^1$  die zijn winst maximaliseert. Een multi-actie  $(q^1, q^2)$  met de eigenschap  $q^2 = R(q^1)$  noemt men een von-stackelberg-evenwicht. De hoeveelheid van de leider in het von-stackelberg-evenwicht vindt men door de functie  $(P(q^1 + R(q^1))q^1 - C^1(q^1))$  te maximaliseren en, als  $q^1$  dat is, de optimale hoeveelheid  $q^2$  van de volger vervolgens door  $P(q^1 + q^2)q^2 - C^2(q^2)$  als functie van  $q^2$  te maximaliseren.

We vinden zo voor het von-stackelberg-evenwicht  $(q^1, q^2)$  het volgende recept:

(Von-stackelberg-regel.) Men bepale de  $q^1$  waar de functie  $P(q^1 + R^2(q^1))q^1 - C^1(q^1)$  maximaal is en vervolgens de  $q^2$  waar  $P(q^1 + q^2)q^2 - C^2(q^2)$  maximaal is.

Laten we dit recept eens toepassen in geval

$$P(Q) = \max(a - bQ, 0), \quad c^i(q^i) = c + dq^i,$$

waar  $a, b, c, d > 0$  en  $a > d$  is. De reactiefunctie  $R^2$  van de volger bepalend leidt tot een winstfunctie voor de leider die gelijk is aan<sup>113</sup>

$$(a - b(q^1 + \frac{a - d - bq^1}{2b}))q^1 - (c + dq^1).$$

Deze is maximaal voor  $q^1 = \frac{a-d}{2b}$ . Het spel heeft dus een uniek von-stackelberg-evenwicht gegeven door  $(\frac{a-d}{2b}, \frac{a-d}{4b})$ .

<sup>112</sup>Heinrich Von Stackelberg, Duitser (1905-1946) en econoom. Een van de grootste economen in die tijd in Duitsland. Hing in begin de Nazi-ideologie aan en trad zelfs toe bij de SS. Later stond men hem, als diep gelovige en zeer teleurgesteld over de Nazi-politiek, niet toe zijn lidmaatschap te beëindigen. Hield zich voornamelijk bezig met mathematische economie met betrekking tot markten en de theorie van kapitaal en rente.

<sup>113</sup>In feite is deze uitdrukking niet correct, omdat ze negatief kan worden. Het juiste antwoord is  $R^2(q^1) = \max(\frac{a-d-bq^1}{2b}, 0)$ . Echter bij dit soort opgaven krijgt men toch, als alles even meezit, de juiste uitkomsten.

## 4.6 Prijsleiderschap-duopolie-spel

Beschouw twee spelers, verder aan te duiden met *fabrikant* en met *detaillist* die proberen zoveel mogelijk te verdienen aan wederverkoop van een zeker artikel.

Het model zit als volgt in elkaar. De fabrikant kan het artikel produceren voor een vaste prijs  $p_f$  per eenheid. Hij verkoopt het artikel verder door aan de detaillist die het op zijn beurt aan de gebruikers van het artikel wederverkoopt. De fabrikant krijgt bij wederverkoop van een hoeveelheid  $q$  van het artikel aan de detaillist te maken met kosten ter grootte van  $c_w \cdot q$  en de detaillist krijgt bij wederverkoop van een hoeveelheid  $q$  van het artikel te maken met kosten ter grootte van  $c_r \cdot q$ . We nemen aan dat het verband tussen de prijs die de detaillist zijn klanten rekent en de hoeveelheid die hij bij die prijs aan hen verkoopt gegeven wordt door een prijs-vraag-relatie

$$p_r(q) = d \cdot q^{-1/\delta},$$

waar  $\delta < -1$ .

Bekijken we nu verder een tweetal varianten. Variant 1 is die waar de fabrikant prijsleider is. In dit geval heeft de detaillist de prijs van de fabrikant zonder meer te accepteren en bepaalt de fabrikant zijn optimale prijs door anticipatie op het gedrag van de detaillist.<sup>114</sup> Dat leidt (zoals we ook zullen zien in (4.4)) op natuurlijke wijze tot een verband tussen  $p_w$  en  $p_r$ . Variant 2 behelst de situatie waar de fabrikant en de detaillist samenspannen (kartel) om een zo groot mogelijke gezamenlijke winst te bereiken.

Beschouwen we eerst variant 1. De fabrikant anticipeert als volgt op het gedrag van de detaillist: als ik het artikel voor een prijs  $p_w$  aan de detaillist verkoop, dan is de winst van de detaillist als hij een hoeveelheid  $q$  verkoopt

$$p_r(q)q - (c_r + p_w)q.$$

De eerste orde conditie voor een maximum van die functie is  $p_r + \frac{dp_r}{dq}q - c_r - p_w = 0$ . Dit leidt voor mij tot de prijs-vraag-relatie

$$p_w(q) = \frac{1 + \delta}{\delta} p_r(q) - c_r. \quad (4.4)$$

Mijn secundaire winstfunctie is daarom

$$\check{\Pi}_w(q) := p_w(q)q - (c_w + p_f)q.$$

De eerste orde conditie voor een maximum van die functie is  $p_w + \frac{dp_w}{dq}q - c_w - p_f = 0$ . Door invullen van (4.4) in deze vergelijking resteert een vergelijking in  $q$  waaruit de winstmaximaliserende hoeveelheid  $q^*$  te halen is en waaruit op hun beurt de optimale  $\hat{p}_w$  en  $\hat{p}_r$  volgen. Wij kiezen hier een iets andere weg. Daartoe schrijven we eerst bovenstaande eerste orde conditie met behulp van (4.4) om tot

$$p_w = -\delta^{-2}(1 + \delta)p_r + c_w + p_f. \quad (4.5)$$

<sup>114</sup>Vergelijk deze situatie met die in het Von-stackelberg-duopolie welk ook wel hoeveelheidsleiderschap-duopolie genoemd wordt.

De vergelijkingen (4.4) en (4.5) zijn nu twee vergelijkingen in  $p_r$  en  $p_w$ . Oplossen geeft de optimale prijzen

$$\hat{p}_r = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2 (c_r + c_w + p_f), \quad (4.6)$$

$$\hat{p}_w = (1+\delta)^{-1}(\delta(c_w + p_f) - c_r) \quad (4.7)$$

(en een zekere optimale hoeveelheid  $\hat{q}$ ).

Beschouwen we nu variant 2. De fabrikant en de detaillist spannen samen om een zo groot mogelijke gezamenlijke winst te bereiken. De natuurlijke secundaire winstfunctie voor dat duo is

$$p_r(q)q - (c_r + c_w + p_f)q.$$

Bepaling van de maximaal haalbare winst leidt hier tot een optimale hoeveelheid  $q^*$  en een optimale prijs

$$p_r^* = \frac{\delta}{1+\delta}(c_r + c_w + p_f). \quad (4.8)$$

Vergelijking van (4.8) met (4.6) leert, bedenkend dat  $\delta < -1$ , dat de detaillistprijs  $p_r^*$  lager is dan  $\hat{p}_r$ , i.e. dan die voor de situatie waar ze niet samenspannen, en bijgevolg dat de hoeveelheid die verkocht wordt aan de gebruikers groter is dan bij niet samenspannen. Dat is een enigszins contra-intuïtief resultaat, hetgeen bekend staat onder de naam *dubbele marginalisatie*. Controleren we mede in dit verband nu ook nog even of de gezamenlijke winst bij samenspannen groter is dan de som van de winsten bij niet samenspannen (hetgeen immers de bedoeling van het samenspannen was). Welnu met samenspannen is de gezamenlijke winst  $W_1 := p_r(q^*)q^* - (c_r + c_w + p_f)q^*$  en zonder samenspannen is deze  $W_2 := p_r(\hat{q})\hat{q} - (c_r + p_w(\hat{q}))\hat{q} + p_w(\hat{q})\hat{q} - (c_w + p_f)\hat{q} = p_r(\hat{q})\hat{q} - (c_r + c_w + p_f)\hat{q}$ . Omdat  $q^*$ , per definitie, de functie  $q \mapsto p_r(q)q - (c_r + c_w + p_f)q$  maximaliseert is inderdaad  $W_1 > W_2$ .

Merken we nog op dat een en ander onafhankelijk van  $d, c_w$  en  $c_r$  is. Merken we ook op dat we hier een analyse gegeven hebben zonder nu uit de doeken te doen met wat voor spel we eigenlijk te maken hebben.

## 4.7 Opgaven

**Opgave 61** *Beschouw een cournot duopolie met  $P(Q) = \max(a - Q, 0)$ ,  $\mathcal{C}_1(q_1) = c_1q_1$ ,  $\mathcal{C}_2(q_2) = c_2q_2$  waar  $a > c_1 \geq c_2 \geq 0$ .*

1. *Laat zien dat de reactiefuncties gegeven worden door*

$$R_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1-q_2}{2} & \text{als } q_2 \leq a - c_1, \\ 0 & \text{als } q_2 \geq a - c_1 \end{cases} .$$

$$R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c_2-q_1}{2} & \text{als } q_1 \leq a - c_2, \\ 0 & \text{als } q_1 \geq a - c_2 \end{cases} .$$

2. Stel  $a \geq 2c_1 - c_2$ . Laat zien dat  $(\frac{a-2c_1+c_2}{3}, \frac{a-2c_2+c_1}{3})$  het unieke cournot evenwicht is.

**Opgave 62** Laat zien dat in elke van de volgende winstmaximalisatieproblemen van een monopolist er een unieke optimale prijs en bepaal deze. Bepaal ook de optimale hoeveelheden en de maximaal haalbare winst.

- a.  $Q(p) = \max(100 - 2p, 0)$ ,  $C(q) = 2q$ ;  
 b.  $Q(p) = \max(80 - 2p, 0)$ ,  $C(q) = 24q$ ;  
 c.  $Q(p) = 10p^{-3}$ ,  $C(q) = 2q$ ;  
 d.  $Q(p) = aP^{-\alpha}$  ( $a > 0, \alpha > 1$ ),  $C(q) = cq$  ( $c > 0$ );  
 e.  $P(q) = \max(20 - q, 0)$  en  $C(q) = q^2 + 3$ .

**Opgave 63** Bepaal de monopoliegraad van Lerner in geval van Opgave 62(d).

**Opgave 64** Beschouw een monopolie met inverse marktvraagfunctie  $P(q) = \max(b - aq, 0)$  en een kwadratische kostenfunctie, i.e.  $C(q) = \alpha q^2 + \beta q + \gamma$ . (Alle parameters zijn positief en  $b > \beta$ .) Laat zien dat de optimale hoeveelheid gelijk aan  $\frac{b-\beta}{2(\alpha+a)}$  en de optimale prijs gelijk aan  $\frac{2\alpha b - 3ab + \alpha\beta}{2(\alpha+a)}$  is.

**Opgave 65** Beschouw een monopolist die niet één maar twee typen artikelen verkoopt. Laat  $P_1(q_1) = \max(36 - 3q_1, 0)$  en  $P_2(q_2) = \max(40 - 5q_2, 0)$  de inverse marktvraagfuncties van die artikelen zijn en  $C(q_1, q_2) = q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2$  de kostenfunctie. Bepaal de optimale prijzen, de optimale hoeveelheden en de maximaal haalbare winst.

**Opgave 66** Bepaal de cournot-evenwichten en de cournot-evenwichtsprijzen voor de volgende cournot-oligopolies:

- a.  $C^1(q^1) = 20q^1$ ,  $C^2(q^2) = 20q^2$ ,  $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$ .  
 b.  $C^1(q^1) = 10q^1$ ,  $C^2(q^2) = \frac{1}{4}(q^2)^2$ ,  $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{5}Q, 0)$ .

**Opgave 67** Gegeven twee identieke producenten die geconfronteerd worden met een marktvraagfunctie van de vorm  $Q(p) = \max(b - ap, 0)$  en een kostenfunctie  $Cc(q) = 4\frac{1}{2}q$ .

- a. Bepaal de cournot-evenwichten.  
 b. Laat zien dat men hier niet te maken heeft met een gevangenendilemmaspel.

**Opgave 68** Beschouw het cournot-duopolie uit Opgave 66(b).

- a. Bepaal voor speler  $i$  zijn dictator-multi-strategieën.  
 b. Laat zien dat er een uniek cournot-evenwicht is. Bepaal de winst van de producenten in het cournot-evenwicht; duidt die winst voor producent  $i$  aan met  $\pi^i$ .

c. Laat zien dat het cournot-evenwicht pareto-inefficiënt is door een hoeveelheidsbundel  $(q^1, q^2)$  te bepalen waarin de winst van elke producent  $i$  groter is dan  $\pi^i$ .

**Opgave 69** Gegeven een inverse marktvraagfunctie en een kostenfunctie  $C$  kunnen we daarbij zowel een monopolie als een cournot-duopolie (waar elke producent  $C$  als kostenfunctie heeft) beschouwen. Laat zien dat in geval  $C$  lineair is, de totale hoeveelheid in het cournot-evenwicht groter is dan de optimale hoeveelheid bij een monopolie. (Concludeer uit deze opgave dat de winst van een producent groter is als de andere producent van de markt zou verdwijnen en de resterende producent dus een monopolist wordt.)

**Opgave 70** Bepaal de kartelevenswichten, de kartelevenswichtsprijzen en de maximaal haalbare winsten voor de volgende kartels:

a.  $P(Q) = \max(4 - Q, 0)$ ,  $C^1(q^1) = q^1$ ,  $C^2(q^2) = \frac{1}{2}(q^2)^2$ ;

b.  $p(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$ ,  $c^1(q^1) = 20q^1$ ,  $c^2(q^2) = 20q^2$ ;

c.  $p(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$ ,  $c^1(q^1) = 20q^1$ ,  $c^2(q^2) = 10q^2$ .

**Opgave 71** Beschouw een cournot-duopolie met  $P(Q) = \max(2 - \frac{1}{1600}Q, 0)$  en  $c^1(q^1) = \frac{1}{2}q^1$ ,  $c^2(q^2) = \frac{1}{2}q^2$ .

a. Bepaal de cournot-evenwichten.

b. Uitgaande van  $q^1(0) = 200$  en  $q^2(0) = 1000$ , bepaal  $q^1(1), q^2(1), q^1(2), q^2(2), \dots, q^1(6), q^2(6)$ .

**Opgave 72** Bepaal de von-stackelberg-evenwichten in de volgende gevallen:

a.  $C^1(q^1) = 20q^1$ ,  $C^2(q^2) = 20q^2$  en  $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$ ;

b.  $C^1(q^1) = 10q^1$ ,  $C^2(q^2) = \frac{1}{4}(q^2)^2$  en  $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{5}Q, 0)$ .

**Opgave 73** a. Beschouw een von-stackelberg-duopolie. Laat zien dat voor elke gegeven hoeveelheid die de volger op de markt brengt, de winst van de volger een dalende functie is van de hoeveelheid die de leider op de markt brengt.

b. Leg uit dat de winst van de leider in het von-stackelberg-duopolie niet lager kan zijn dan zijn winst in het cournot-duopolie.

**Opgave 74** Stel de inverse marktvraagfunctie is  $P(Q) := \max(100 - 2Q, 0)$  en de kostenfunctie van elke producent is  $C(q) = 4q$ . Bepaal voor de volgende markt vormen de evenwichtsprijzen, de totale verkochte hoeveelheden en de maximaal haalbare winsten: volledige concurrentie, monopolie, cournot-duopolie, kartel (2 producenten), von-stackelberg-duopolie.





# Bibliografie

- Binmore, K. (1992). *Fun and Games*. D. C. Heath and Company.
- Bouton, C. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics.*, 3, 35–39.
- Cournot, A. (1863 (1838)). *Recherches sur les Principes de la Théorie des Richesses*. Paris: Hachette.
- Dieudonné, J. (1987). *Pour l'Honneur de l'Esprit Humain* (2 ed.). Paris: Hachette. ISBN 2 01 014000 1.
- Ichiishi, T. (1983). *Game Theory for Economic Analysis*. New York: Academic Press.
- Nash, J. (1950). Equilibrium points in  $n$ -person games. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 36, 48–49.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54, 286–295.
- von Mouche, P. H. M. (2005). *Niet Coöperatieve Speltheorie. Deel II*. Wageningen Universiteit.
- von Neumann, J. (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295–320.
- von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.