Semicontinuïteit: Theorie en Toepassingen

© P. H. M. v. Mouche

2005

Verbeterde versie 1.28 (mei 2026)

Voorwoord

Dit typoscript gaat over semicontinuïteit van reëelwaardige functies. Het is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl/manus.html` (indien die url nog geldig is).[1] Naast dat deze resultaten *an sich* interessant kunnen zijn, komen ze ook elders soms goed van pas. In het bijzonder komen aan de orde: het lemma van Weierstrass-Lebesgue en een dekpuntstelling voor semicontinue functies. Natuurlijk is zekere voorkennis gewenst: wat dat dan wel is zal snel duidelijk worden bij het doorbladeren van het typoscript.

De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor zijn hulp en op- en aanmerkingen. Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

1 Noties **2**

2 Karakterisaties **3**

3 Oud maakt nieuw **5**

4 Rechts- en links-continuïteit **7**

5 Extremaliseerders **8**

6 Dekpuntstelling **9**

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Noties

Zij $g : X \to \mathbb{R}$ een functie, waar X een topologische ruimte is, en zij a een verdichtingspunt van X. g heet <u>continu in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. En g heet <u>continu</u> als g continu in elk punt van X is. Omdat $|g(x)-g(a)| < \epsilon$ equivalent is met $g(a)-\epsilon < g(x) < g(a)+\epsilon$, kunnen we de definitie van continuïteit als volgt opsplitsen:

Definitie 1 Zij X een topologische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en a een verdichtingspunt van X.

1. g heet <u>semicontinu naar beneden in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. En g heet <u>semicontinu naar beneden</u> als g in elk punt van X semicontinu naar beneden is.

2. g heet <u>semicontinu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$. En g heet <u>semicontinu naar boven</u> als g in elk punt van X semicontinu naar boven is. $\diamond$

Dus

$$g \text{ is continu (in } a) \;\Leftrightarrow\; g \text{ is zowel semicontinu naar boven als naar beneden (in } a).$$

Men zou kunnen zeggen: een functie die semicontinu naar beneden in a is, springt in de buurt van a niet snel naar beneden. En: een functie die semicontinu naar boven in a is, springt in de buurt van a niet snel naar boven. Verder is het evident dat:

$$g \text{ is semicontinu naar boven (in } a) \;\Leftrightarrow\; -g \text{ is semicontinu naar beneden (in } a).$$

Deze laatste opmerking rechtvaardigt dat de auteur zich hieronder veelal (in definities, opmerkingen en bewijzen) zal beperken tot semicontinuïteit naar beneden (en in voetnoten eventueel de andere variant nog geeft).

Opmerking: er bestaat een variant voor bovenstaande noties in geval $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

We weten dat in een metrische ruimte continuïteit van een functie g in a ook met behulp van limieten gedefinieerd kan worden. Ook voor de semicontinuïteitsnoties kan dat, maar dan met behulp van boven- en benedenlimieten. Laten we dit nader bekijken.[2]

Zij X een metrische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en a een verdichtingspunt van X. In deze context kijgen we voor bovenstaande definitie de volgende.

- g heet <u>semicontinu naar beneden in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in B_\delta(a)$. En g heet <u>semicontinu naar beneden</u> als g in elk punt van X semicontinu naar beneden is.

- g heet <u>semicontinu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in B_\delta(a)$. En g heet <u>semicontinu naar boven</u> als g in elk punt van X semicontinu naar boven is. $\diamond$

Propositie 1 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en a een verdichtingspunt van X.*

1. *g is continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.*

2. *g is semicontinu naar beneden in a dan en slechts dan als $\liminf_{x\to a} g(x) \geq g(a)$.*

[2] De auteur heeft ook over dat onderwerp een typoscript getiteld "Boven- en benedenlimieten" op zijn webpagina met typoscripten ter beschikking gesteld.

3. g is semicontinu naar boven in a dan en slechts dan als $\limsup_{x\to a} g(x) \leq g(a)$. $\diamond$

Bewijs.— Zij d de metriek. Definieer $B'_r(a)$ als de open bol met straal r rondom a met a er niet in.

1. Dit slaan we maar over.
2. Per definitie van lim inf geldt $\liminf_{x\to a} g(x) = \sup_{r>0} \inf_{x\in B'_r(a)} g(x)$. Definieer voor $\delta > 0$

$$h(\delta) := \inf_{x\in B'_\delta(a)} g(x).$$

Er volgt

$$\liminf_{x\to a} g(x) = \sup_{\delta>0} h(\delta). \tag{1}$$

Stel nu g is semicontinu naar beneden in a. Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een $\delta_0 > 0$ is zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in B'_{\delta_0}(a)$. Dus $h(\delta_0) \geq g(a) - \epsilon$. Met (1) volgt

$$\liminf_{x\to a} g(x) = \sup_{\delta>0} h(\delta) \geq h(\delta_0) \geq g(a) - \epsilon.$$

Omdat ϵ willekeurig is, volgt $\liminf_{x\to a} g(x) \geq g(a)$.

Nu de andere kant op. Stel $\liminf_{x\to a} g(x) \geq g(a)$. Dus, met (1),

$$\sup_{\delta>0} h(\delta) \geq g(a).$$

Zij $\epsilon > 0$. Omdat $\sup_{\delta>0} h(\delta) > g(a) - \epsilon$, bestaat er een $\delta_0 > 0$ met

$$\inf_{x\in B'_{\delta_0}(a)} g(x) = h(\delta_0) > g(a) - \epsilon.$$

Dit impliceert voor alle $x \in B'_{\delta_0}(a)$ dat

$$g(x) > g(a) - \epsilon.$$

Omdat deze strikte ongelijkheid ook voor $x = a$ geldt, volgt dat g semicontinu naar beneden in a is.

3. Analoog aan deel 2. Q.e.d.

2 Karakterisaties

Gegeven een functie $g : C \to \mathbb{R}$ waar C een of andere verzameling is, definiëren we voor $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\mathrm{Niv}^{=}_{\alpha} := \{x \in C \mid g(x) = \alpha\}$ de <u>niveauverzameling</u> van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}^{\leq}_{\alpha} := \{x \in C \mid g(x) \leq \alpha\}$ de <u>benedenniveauverzameling</u> van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}^{\geq}_{\alpha} := \{x \in C \mid g(x) \geq \alpha\}$ de <u>bovenniveauverzameling</u> van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}^{<}_{\alpha} := \{x \in C \mid g(x) < \alpha\}$ de <u>strikte benedenniveauverzameling</u> van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}^{>}_{\alpha} := \{x \in C \mid g(x) > \alpha\}$ de <u>strikte bovenniveauverzameling</u> van g m.b.t. α.

Propositie 2 *Zij X een topologische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \to \mathbb{R}$ zijn equivalent:*[3]

a. g is semicontinu naar beneden;

b. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}^{>}_{\alpha}$ open;

c. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}^{\leq}_{\alpha}$ gesloten. $\diamond$

[3] Hier is het "broertje" van deze propositie: g is semicontinu naar boven d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}^{<}_{\alpha}$ open d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}^{\geq}_{\alpha}$ gesloten.

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $a \in \mathrm{Niv}_\alpha^>$. Omdat $g(a) > \alpha$ en g semicontinu naar beneden in a is, is er een omgeving van a zodanig dat $g(x) > \alpha$ $(x \in V)$. Dus $V \in \mathrm{Niv}_\alpha^>$.

"'$b \Rightarrow a$": zij $a \in X$. We bewijzen dat g semicontinu naar beneden in a is. Daartoe zij $\epsilon > 0$. Omdat $V := \mathrm{Niv}_{g(a)-\epsilon}^>$ open is en $a \in V$ is, is V een omgeving van a met $g(a) - \epsilon < g(x)$ $(x \in V)$.

"$b \Rightarrow c$": omdat $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) > \alpha\}^c$ en het complement van een open verzameling gesloten is.

"$c \Rightarrow b$": omdat $\{x \in X \mid g(x) > \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}^c$ en het complement van een gesloten verzameling open is. Q.e.d.

Het is bekend dat continuïteit van een afbeelding tusen metrische ruimten equivalent is met rijtjes-continuïteit van die afbeelding. Stelling 1 hieronder behelst de pendant daarvan voor semicontinuïteit gebruikmakend van lim inf en lim sup.

Om het bewijs van die stelling rond te krijgen is het goed even terug te gaan naar de volgende situatie van continue afbeeldingen:

Propositie 3 *Laat X een metrische ruimte zijn, $g : X \to \mathbb{R}$ en $a \in S$. Dan zijn equivalent:*

1. *g is continu te a.*
2. *Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$.* $\diamond$

Bewijs.— "$1 \Rightarrow 2$": zij $\epsilon > 0$. omdat g continu te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $|g(a_n) - g(a)| < \epsilon$. Dus $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$.

"$2 \Rightarrow 1$": uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet continu te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ (i.e. de open bol rond a met straal $1/n$) is met $|g(x_n) - g(a)| \geq \epsilon$. Nu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, maar $(g(a_n))$ convergeert niet naar $g(a)$. Q.e.d.

Stelling 1 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ en $a \in X$. Dan zijn equivalent:*[4]

a. g is semicontinu naar beneden in $a \in X$.

b. Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq g(a)$. $\diamond$

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g semicontinu naar beneden te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $g(a_n) > g(a) - \epsilon$. Dit impliceert $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(g(a) - \epsilon) = g(a) - \epsilon$. Omdat dit voor alle $\epsilon > 0$ geldt, volgt $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq g(a)$.

"$b \Rightarrow a$": uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet semicontinu naar beneden te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ is met $g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$. Nu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en vandaar $\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \geq g(a)$. Maar $\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$, een tegenspraak. Q.e.d.

Stelling 2 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$ een verdichtingspunt. Dan zijn equivalent:*

1. *g is semicontinu naar beneden in a.*
2. $\liminf_{x\to a} g(x) \geq g(a)$. $\diamond$

Bewijs.— Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Laat X en Y verzamelingen zijn en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan is de <u>grafiek</u> van g gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}(g) := \{(x, y) \mid x \in X,\ y = g(x)\} \subseteq X \times Y.$$

[4] Hier is het "broertje" van deze stelling: g is semicontinu naar boven in a dan en slecths dan als voor elke rij (a_n) uit X er geldt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} g(a_n) \leq g(a)$.

In het geval dat $Y \subseteq \mathbb{R}$ is ook haar epigrafiek

$$\mathrm{epi}(g) := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \geq g(x)\} \subseteq X \times Y,$$

en haar hypografiek

$$\mathrm{hypo}(g) := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \leq g(x)\} \subseteq X \times Y$$

gedefinieerd. Dus, in dat geval, is de grafiek van g de doorsnede van haar epigrafiek en hypografiek.

Als X en Y topologische ruimten zijn, dan heeft het, cartesische producten steeds van de producttopologie voorziend, zin te spreken van dingen als dat $\mathrm{graph}(g)$ gesloten is. Dat betekent dan dus dat $\mathrm{graph}(g)$ een gesloten deel van $X \times Y$ is.

Stelling 3 *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \to \mathbb{R}$ zijn equivalent:*[5]

a. g is semicontinu naar beneden;

b. $\mathrm{epi}(g)$ *is gesloten.*[6] $\diamond$

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $((x_n, y_n))$ een rij uit $\mathrm{epi}(g)$ die convergeert naar $(x,y) \in X \times \mathbb{R}$; dus $g(x_n) \leq y_n$ voor alle n, (x_n) convergeert naar x en (y_n) convergeert naar y. Met Stelling 1 volgt $g(x) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) \leq \liminf g(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dus $(x,y) \in \mathrm{epi}(g)$, zoals gewenst.

"$b \Rightarrow a$": stel $\mathrm{epi}(g)$ is gesloten. Om te bewijzen dat g semicontinu naar beneden is bewijzen we dat voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de benedenniveauverzameling van g met betrekking tot α gesloten is (en kunnen dan Propositie 2 toepassen). Daartoe zij (x_n) een rij uit $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}$ die convergeert naar, zeg, y. We zijn klaar als we laten zien dat $g(y) \leq \alpha$. Omdat $g(y_n) \leq \alpha$, is (x_n, α) een rij uit $\mathrm{epi}(g)$. Deze rij convergeert naar (y, α). Omdat $\mathrm{epi}(g)$ gesloten is, is $(y,\alpha) \in \mathrm{epi}(g)$, dus $g(y) \leq \alpha$. Q.e.d.

Een toepassinkje van Stelling 3 is het volgende: als X een metrische ruimte is en $g : X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding, dan is de grafiek van g gesloten. Inderdaad: omdat g zowel semicontinu naar beneden als naar boven is, is zowel de epigrafiek als de hypografiek van g gesloten. De grafiek van g is, zijnde een doorsnede van die grafieken, weer gesloten.[7]

3 Oud maakt nieuw

Propositie 4 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$. Als $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ functies zijn die semicontinu naar beneden zijn in a. Dan:*

1. *voor $\lambda > 0$ is de functie λf_1 semicontinu naar beneden in a.*
2. *voor $\lambda < 0$ is de functie λf_1 semicontinu naar boven in a.*
3. *de functie $f_1 + f_2$ is semicontinu naar beneden in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij $\epsilon > 0$.

Omdat f_1 semicontinu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $f_1(x) < f_1(a) + \epsilon/\lambda$ $(x \in V)$. Er volgt dat $(\lambda f_1)(x) < (\lambda f_1)(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$.

2. Dat volgt uit deel 1.

3. Omdat f_i semicontinu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V_i van a zodanig dat $f_i(x) < f_i(a) + \epsilon/2$ $(x \in V_i)$. Er volgt dat $V_1 \cap V_2$ een omgeving van a is en dat $(f_1 + f_2)(x) < (f_1 + f_2)(a) + e$ voor alle $x \in V_1 \cap V_2$. Q.e.d.

[5] Hier is het "broertje": g is semicontinu naar boven d.e.s.d.a. $\mathrm{hypo}(g)$ is gesloten deel van $X \times \mathbb{R}$.

[6] En hier is het "broertje": g is semicontinu naar boven d.e.s.d.a. $\mathrm{hypo}(g)$ is gesloten.

[7] Maar in feite geldt iets veel sterkers (zie het typoscript "Parameterafhankelijkheid van Oplossingen" van de auteur) de grafiek van een afbeelding $g : X \to Y$, waar X en Y topologische ruimten zijn met Y hausdorfs, is een gesloten deel van $X \times Y$ als g continu is en indien Y compact is, dan geldt zelfs: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.

Propositie 5 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$.*

1. *Stel $(g_i)_{i\in I} : X \to \mathbb{R}$ is een familie van functies zodanig dat $g(x) := \sup_{i\in I} g_i(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in X)$.*[8] *Als elke g_i semicontinu naar beneden in a is, dan is de functie $g : X \to \mathbb{R}$ ook semicontinu naar beneden in a.*

2. *Als $g_1, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$ functies zijn die semicontinu naar beneden in a zijn, dan is $g := \min(g_1, \ldots, g_m)$ ook semicontinu naar beneden in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel elke g_i semicontinu naar beneden in a is. Zij $\epsilon > 0$. Er is een $i \in I$ zodanig dat $g_i(a) > g(a) - \frac{\epsilon}{2}$. Omdat g_i semicontinu naar boven in a is, is er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g_i(a) - \frac{\epsilon}{2}$ $(x \in V)$. Voor $x \in V$ geldt dus $g(x) > g(a) - \epsilon$.

2. Stel $g_1, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$ zijn semicontinu naar beneden in a. Zij $\epsilon > 0$. Er is een omgeving V_i van a zodanig dat $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ $(x \in V_i)$. $V := \cap_{i=1}^m V_i$ is een omgeving van a waarvoor voor alle i geldt $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ $(x \in V)$. Daaruit volgt voor alle $x \in V$ dat $g(x) = \min(g_1(x), \ldots, g_m(x)) > \min(g_1(a), \ldots, g_m(a)) - \epsilon = g(a) - \epsilon$. Q.e.d.

Propositie 6 *Zij X een topologische ruimte. Als $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ positieve functies zijn die semicontinu naar beneden zijn, dan is ook de functie $f_1 f_2$ semicontinu naar beneden.* $\diamond$

Bewijs.— Zij $\lambda \in \mathbb{R}$. We bewijzen dat $\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\}$ open is. Omdat $f_1 f_2 > 0$ is, mogen we $\lambda > 0$ veronderstellen. Nu opmerkend dat

$$\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\} = \cup_{\alpha>0}(\{x \in X \mid f_1(x) > \alpha\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) > \lambda/\alpha\})$$

een vereniging van open verzamelingen is en dus open is. Q.e.d.

Propositie 7 *Stel J_1, J_2 zijn eigenlijke reële intervallen, $f_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ en $f_2 : J_2 \to \mathbb{R}$.*

1. *Stel $a \in J_1$ met $f_1(a) \in J_2$. Als f_1 continu in a is en f_2 semicontinu naar beneden in $f_1(a)$ is, dan is $f_2 \circ f_1$ semicontinu naar beneden in a.*[9]

2. *Stel $f_1(J_1) \subseteq J_2$. Als f_1 continu is en f_2 semicontinu naar beneden is, dan is de functie $f_2 \circ f_1$ semicontinu naar beneden.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel f_1 is continu in a en f_2 is semicontinu naar beneden in $f_1(a)$. Zij $\epsilon > 0$. Omdat f_2 semicontinu naar beneden in $f_1(a)$ is, is er een $\xi > 0$ zodanig dat voor alle $y \in J_2$

$$|y - f_1(a)| < \xi \;\Rightarrow\; f_2(y) > f_2(f_1(a)) - \epsilon.$$

Omdat f_1 continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in J_1$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f_1(x) - f_1(a)| < \xi.$$

Nu volgt, zoals gewenst, voor alle $x \in J_1$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f_2(f_1(x)) > f_2(f_1(a)) - \epsilon.$$

2. Vanwege deel 1. Q.e.d.

Als f_1 semicontinu naar beneden in a is en f_2 continu naar beneden in $f_1(a)$ is, dan hoeft $f_2 \circ f_1$ niet semicontinu naar beneden in a te zijn: $f_2(x) = -x$ en $f_1(x) = 0$ $(x \neq 0)$ en $f_1(0) = -1$. Wel hebben we

Propositie 8 *Stel J_1, J_2 zijn eigenlijke reële intervallen, $f_1 : J_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ en f_2 stijgend.*

[8] Merk op dat de auteur in dit typoscript niet met functies werkt die de waarde $+\infty$ of $-\infty$ aannemen kunnen.
[9] Als f_1 continu in a is en f_2 semicontinu naar boven in $f_1(a)$ is, dan is $f_2 \circ f_1$ semicontinu naar boven in a.

1. *Stel $a \in J_1$ met $f_1(a) \in J_2$. Als f_1 semicontinu naar beneden in a is en f_2 semicontinu naar beneden in $f_1(a)$ is, dan is de functie $f_2 \circ f_1 : I \to \mathbb{R}$ semicontinu naar beneden in a.*

2. *Stel $f_1(J_1) \subseteq J_2$. Als f_1 en f_2 semicontinu naar beneden zijn, dan is de functie $f_2 \circ f_1$ semicontinu naar beneden.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel f_1 is continu in a en f_2 is semicontinu naar beneden in $f_1(a)$. Zij $\epsilon > 0$. Omdat f_2 semicontinu naar beneden in $f_1(a)$ is, is er een $\xi > 0$ zodanig dat voor alle $y \in J_2$

$$|y - f_1(a)| < \xi \;\Rightarrow\; f_2(y) > f_2(f_1(a)) - \epsilon.$$

Omdat f_1 semicontinu naar beneden in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in J_1$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f_1(x) > f_1(a) - \xi.$$

Laat nu $x \in I$ met $|x - a| < \delta$. Dan $f_1(x) > f_1(a) - \xi$. Onderscheid twee gevallen.

$f_1(a) \leq f_1(x)$: omdat f_2 stijgend is, volgt, zoals gewenst, $f_2(f_1(x)) \geq f_2(f_1(a)) > f_2(f_1(a)) - \epsilon$.

$f_1(a) \geq f_1(x)$: nu $f_1(a) + \xi > f_1(x) > f_1(a) - \xi$, dus $|f_1(x) - f_1(a)| < \xi$ en volgt, zoals gewenst, $f_2(f_1(x)) > f_2(f_1(a)) - \epsilon$.

2. Vanwege deel 1. Q.e.d.

Propositie 9 *Stel $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ en $f{\restriction}[0,1[$ is semicontinu naar beneden.*

1. *f is dalend dan en slechts dan als $f{\restriction}[0,1[$ dalend is.*

2. *f is strikt dalend dan en slechts dan als $f{\restriction}[0,1[$ strikt dalend is.* $\diamond$

Bewijs.— Alleen de "als-beweringen" zijn niet evident. Deze bewijzen we uit het ongerijmde.

1. Stel dus, dat $f{\restriction}[0,1[$ dalend is en dat f niet dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0,1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1)(\leq) < f(x_2)$. Omdat $f{\restriction}[0,1[$ dalend is volgt $x_2 = 1$. Zij $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1) < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semicontinu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2{}' \in]x_1, x_2[$ met $f(x_2{}') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1 < x_2{}'$, $x_1, \in x_2{}' \in [0,1[$ en $f(x_2{}') > f(x_1)$, een tegenspraak met de dalendheid van $f{\restriction}[0,1[$.

2. Stel dus dat $f{\restriction}[0,1[$ strikt dalend is en dat f niet strikt dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0,1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1) \leq f(x_2)$. Omdat $f{\restriction}[0,1[$ strikt dalend is volgt $x_2 = 1$. Fixeer $x_1{}' \in]x_1, x_2[$ met $f(x_1{}') < f(x_1)$. Omdat $f(x_1{}') < f(x_2)$ is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1{}') < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semicontinu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2{}' \in]x_1{}', x_2[$ met $f(x_2{}') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1{}' < x_2{}'$, $x_1{}', \in x_2{}'[0,1[$ en $f(x_2{}') > f(x_1{}')$, een tegenspraak met de dalendheid van $f{\restriction}[0,1[$. Q.e.d.

4 Rechts- en links-continuïteit

We hebben gezien dat de semicontinuïteitsnoties zich op natuurlijke wijze voordoen door een opsplitsing van de continuïteitsnotie. In het bijzonder zijn semicontinuiteits-noties gedefinieerd voor functies in geval het domein een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Voor dergelijke functies zijn ook de noties van rechts- en linkscontinuïteit gedefinieerd, hetgeen in dat geval een alternatieve opsplitsing van de continuïteitsnotie betreft. Men verwarre deze noties niet. We bekijken dit hier nader.

Zij $g : X \to \mathbb{R}$, waar X een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, en $a \in X$. g heet <u>rechts-continu in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. g heet <u>links-continu in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x \leq a$. g heet <u>links-continu</u> als g links-continu in elk punt van X is en g heet <u>rechts-continu</u> als g rechts-continu in elk punt van X is.

Merk o.a. op dat als X een eigenlijk interval is en $a\partial_+(X)$, dat dan g rechts-continu in a is. Natuurlijk geldt:

$$g \text{ is continu (in } a) \;\Leftrightarrow\; g \text{ is zowel rechts- als links-continu (in } a).$$

Propositie 10 *Zij $g : X \to \mathbb{R}$ stijgend, waar X een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, en $a \in X$. Dan:*

1. *g is semicontinu naar boven in a $\Leftrightarrow$ g is rechts-continu in a.*
2. *g is semicontinu naar beneden in a $\Leftrightarrow$ g is links-continu in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. "$\Rightarrow$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g semicontinu naar boven in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. In het bijzonder $g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $0 \leq g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$ en dus dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Dus g is rechts-continu in a.

"$\Leftarrow$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g rechts-continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $|g(x) - g(a)| < +\epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. In het bijzonder $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x < a + \delta$ en dus dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. Dus g is semicotninu naar boven in a.

2. Analoog aan 1. Q.e.d.

Dit alles geziend hebbende, zij het duidelijk dat men ook op voor de hand liggende wijze de noties van links-semicontinu naar beneden, rechts-semicontinu naar beneden, links-semicontinu naar boven en rechts-semicontinu naar boven invoeren kan:

Definitie 2 Zij X een deelverzameling van $\mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$.

1. g heet <u>links-semicontinu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in]a - \delta, a]$.

   g heet <u>links-semicontinu naar boven</u> als g in elk punt van X links semicontinu naar boven is.

   g heet <u>rechts-semicontinu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in [a, a + \delta[$.

   g heet <u>rechts-semicontinu naar boven</u> als g in elk punt van X rechts semicontinu naar boven is.

2. g heet <u>links-semicontinu naar beneden in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in]a - \delta, a]$.

   g heet <u>links-semicontinu naar beneden</u> als g in elk punt van X links-semicontinu naar boven is.

   g heet <u>rechts-semicontinu naar beneden in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in [a, a + \delta[$.

   g heet <u>rechts-semicontinu naar beneden</u> als g in elk punt van X rechts-semicontinu naar boven is.

5 Extremaliseerders

Propositie 11 *Zij X een niet-lege metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semicontinu naar beneden. Dan is de verzameling der minimaliseerders van g gesloten, en compact als X compact is.*[10] $\diamond$

Bewijs.— Zij $\alpha := \inf g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zij M de verzameling der minimaliseerders van g. Er geldt dat $M = \cap_{\lambda > \alpha}\{x \in X \mid g(x) \leq \lambda\} = \cap_{\lambda > \alpha}\mathrm{Niv}_{\lambda}^{\leq}$. Omdat g semicontinu naar beneden is, is vanwege Propositie 2, elke $\mathrm{Niv}_{\lambda}^{\leq}$ gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten.

[10] Hier is het "broertje": zij X een niet-lege metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semicontinu naar boven. Dan is de verzameling der maximaliseerders van g gesloten.

Als X compact is, dan is ook M compact zijnde een gesloten deel van X. Q.e.d.

Het bewijs van de volgende stelling berust op toepassing van de volgende variant (in termen van gesloten deelverzamelingen) voor de karakterisatie van compactheid: een toplogische ruimte X is compact d.e.s.d.a. voor elke familie $(F_i)_{i\in I}$ van gesloten delen van X waarvoor elke eindige doorsnede niet-leeg is, de doorsnede $\cap_{i\in I}F_i$ niet-leeg is.

Stelling 4 *(Lemma van Weierstrass-Lebesgue.) Zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semicontinu naar beneden. Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact.*[11] $\diamond$

Bewijs.— Zij M de verzameling der minimaliseerders van g. Propositie **??** garandeert dat M compact is. Resteert te bewijzen dat er een minimaliseerder bestaat. Daartoe merken we op dat voor elke $\lambda > \alpha$, de verzameling $\mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda}$, niet-leeg is. En dat $\mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda_1} \subseteq \mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda_2}$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2)$. Het boven deze stelling genoemde resultaat garandeert daarom dat $M = \cap_{\lambda>\alpha}\mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda} \neq \emptyset$. Q.e.d.

Hier is een variant van bovenstaande stelling voor coërcieve functies.

Propositie 12 *Zij X een niet-leeg gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ en $g : X \to \mathbb{R}$ semicontinu naar beneden en coërcief.*[12] *Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact.* $\diamond$

Bewijs.— Zij $\alpha := \inf g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zij M de verzameling der minimaliseerders van g. Er geldt dat $M = \cap_{\lambda>\alpha}\{x \in X \mid g(x) \leq \lambda\} = \cap_{\lambda>\alpha}\mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda}$. Omdat g semicontinu naar beneden is, is vanwege Propositie 2, elke $\mathrm{Niv}^{\leq}_{\lambda}$ gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten. M is ook begrensd, want anders zou er een rij (z_n) uit M zijn met $\lim_{n\to\infty} \| z_n \| = \infty$ en dan zou $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$ Er volgt dat M compact is.

Fixeer een rij (z_n) in X met $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \alpha$. De coërciviteit van g impliceert dat (z_n) begrensd is. Bolzano-Weierstrass garandeert dat dat (z_n) een limietpunt heeft; zij (y_n) een deelrij van (z_n) met limiet, zeg, y. Omdat X gesloten is, is $y \in X$. Omdat g semicontinu naar benenden is, garandeert Stelling 1 dat $\alpha = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = \liminf_{n\to\infty} g(y_n) \geq g(y)$. Daauit $g(y) = \alpha$. Dus y is een minimaliseerder van g. Q.e.d.

6 Dekpuntstelling

Stelling 5 *Stel I is een eigenlijk interval van $\mathbb{R}$ en $g : I \to \mathbb{R}$ een functie die links-semicontinu naar boven en rechts-semicontinu naar beneden is. Als er $a, b \in I$ met $a < b$, $a < g(a)$ en $b > g(b)$ bestaan, dan heeft g een dekpunt.* $\diamond$

Bewijs.— Definieer recursief de rijtjes of rijen $(a_n), (b_n)$ en (c_n), door:

$$a_0 := a,\ b_0 := b$$

en voor $n \geq 1$:

$$c_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Als $g(c_n) = c_n$, dan stop, anders definieer verder

$$\begin{cases} a_n := c_n \text{ en } b_n := b_{n-1} \text{ als } c_n < g(c_n), \\ a_n := a_{n-1} \text{ en } b_n := c_n \text{ als } c_n > g(c_n). \end{cases}$$

Als deze procedure stopt, dan heeft g een dekpunt. Als ze niet stopt, dan hebben we rijen $(a_n), (b_n)$ en (c_n). Men ziet snel in dat $a_0 \leq a_n \leq c_{n+1} \leq b_n \leq b_0$, dat de rij (a_n) is stijgend is, dat de rij

[11] Hier is het "broertje": zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semicontinu naar boven. Dan heeft g een maximaliseerder en de verzameling der maximaliseerders van g is compact.

[12] Dat g coërcief is betekent: voor elke rij (x_n) in X met $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = \infty$ geldt $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty$.

(b_n) dalend is en dat $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Er volgt dat (a_n) en (b_n) convergeren naar eenzelfde punt x.

Men ziet ook snel in dat $a_n < g(a_n)$ voor alle n en $b_n > g(b_n)$ voor alle n. Dat impliceert

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} g(a_n), \quad x = \lim_{n\to\infty} b_n \geq \liminf_{n\to\infty} g(b_n).$$

Omdat g te x links-semicontinu naar boven is en $a_n \leq x$ is volgt, $\limsup_{n\to\infty} g(a_n) \leq g(x)$ en dus nu

$$x \leq g(x).$$

Omdat g te x links-semicontinu naar beneden en $b_n \geq x$ is volgt,

$$g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} g(b_n)$$

en dus nu

$$g(x) \leq x.$$

Dus $g(x) = x$. Q.e.d.