Semi-continuïteit: Theorie en Toepassingen

2005

Verbeterde versie 1.2 (juni 2019)

Voorwoord

Dit typoscript gaat over semi-continuïteit van reëelwaardige functies. Het is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl/manus.html` (indien die url nog geldig is).[1] Naast dat deze resultaten *an sich* interessant kunnen zijn, komen ze ook elders soms goed van pas. In het bijzonder komen aan de orde: het lemma van Weierstrass-Lebesgue en een dekpuntstelling voor semi-continue afbeeldingen. Voorkennis is vereist: wat dat dan wel is zal snel duidelijk worden bij het doorbladeren van het typoscript.

De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor zijn hulp en op- en aanmerkingen. Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Noties

Zij $g : X \to \mathbb{R}$ een functie, waar X een topologische ruimte is, en zij $a \in X$. g heet continu in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. En g heet continu als g continu in elk punt van X is. Omdat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ equivalent is met $g(a) - \epsilon < g(x) < g(a) + \epsilon$, kunnen we de definitie van continuïteit als volgt opsplitsen:

Definitie 1 Zij X een topologische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$.

1. g heet semi-continu naar boven in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$. g heet semi-continu naar boven als g in elk punt van X semi-continu naar boven is.

2. g heet semi-continu naar beneden in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. g heet semi-continu naar beneden als g in elk punt van X semi-continu naar beneden is. $\diamond$

Dus

$$g \text{ is continu (in } a) \;\Leftrightarrow\; g \text{ is zowel semi-continu naar boven als naar beneden (in } a).$$

Men zou kunnen zeggen: een functie die semi-continu naar beneden in a is, springt in de buurt van a niet snel naar beneden. En: een functie die semi-continu naar boven in a is, springt in de buurt van a niet snel naar boven. Verder is het evident dat:

$$g \text{ is semi-continu naar boven (in } a) \;\Leftrightarrow\; -g \text{ is semi-continu naar beneden (in } a).$$

Deze laatste opmerking rechtvaardigt dat de auteur zich hieronder veelal zal beperken tot semi-continuïteit naar beneden (en in voetnoten eventueel de andere variant nog geef).

Opmerking: er bestaat een variant voor bovenstaande noties voor functie $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

2 Karakterisaties

Gegeven een functie $g : C \to \mathbb{R}$ waar C een of andere verzameling is, definiëren we voor $\alpha \in \mathbb{R}$:
$\mathrm{Niv}_\alpha^= := \{x \in C \mid g(x) = \alpha\}$ de niveauverzameling van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}_\alpha^\leq := \{x \in C \mid g(x) \leq \alpha\}$ de benedenniveauverzameling van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}_\alpha^\geq := \{x \in C \mid g(x) \geq \alpha\}$ de bovenniveauverzameling van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}_\alpha^< := \{x \in C \mid g(x) < \alpha\}$ de strikte benedenniveauverzameling van g m.b.t. α;
$\mathrm{Niv}_\alpha^> := \{x \in C \mid g(x) > \alpha\}$ de strikte bovenniveauverzameling van g m.b.t. α.

Propositie 1 *Zij X een topologische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \to \mathbb{R}$ zijn equivalent:*[2]

a. g is semi-continu naar beneden;

b. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}_\alpha^>$ open;

c. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}_\alpha^\leq$ gesloten. $\diamond$

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $a \in \mathrm{Niv}_\alpha^>$. Omdat $g(a) > \alpha$ en g semi-continu naar beneden in a is, is er een omgeving van a zodanig dat $g(x) > \alpha$ $(x \in V)$. Dus $V \in \mathrm{Niv}_\alpha^>$.

"'$b \Rightarrow a$": zij $a \in X$. We bewijzen dat g semi-continu naar beneden in a is. Daartoe zij $\epsilon > 0$. Omdat $V := \mathrm{Niv}_{g(a)-\epsilon}^>$ open is en $a \in V$ is, is V een omgeving van a met $g(a) - \epsilon < g(x)$ $(x \in V)$.

"$b \Rightarrow c$": omdat $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) > \alpha\}^c$ en het complement van een open verzameling gesloten is.

[2]Hier is het "broertje" van deze propositie: g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}_\alpha^<$ open d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathrm{Niv}_\alpha^\geq$ gesloten.

"$c \Rightarrow b$": omdat $\{x \in X \mid g(x) > \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}^c$ en het complement van een gesloten verzameling open is. Q.e.d.

Het is bekend dat continuïteit van een afbeelding tusen (semi-)metrische ruimten equivalent is met rijtjes-continuïteit van die afbeelding. Stelling 1 hieronder behelst de pendant daarvan voor semi-continuïteit gebruikmakend van boven en benedenlimieten.[3]

Om het bewijs van die stelling rond te krijgen is het goed even terug te gaan naar de volgende situatie van continue afbeeldingen:

Propositie 2 *Laat X een metrische ruimte zijn, $g : X \to \mathbb{R}$ en $a \in S$. Dan zijn equivalent:*

1. *g is continu te a.*
2. *Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$.* $\diamond$

Bewijs.— "$1 \Rightarrow 2$": zij $\epsilon > 0$. omdat g continu te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $|g(a_n) - g(a)| < \epsilon$. Dus $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$.

"$2 \Rightarrow 1$": uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet continu te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ (i.e. de open bol rond a met straal $1/n$) is met $|g(x_n) - g(a)| \geq \epsilon$. Nu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, maar $(g(a_n))$ convergeert niet naar $g(a)$. Q.e.d.

Stelling 1 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \to \mathbb{R}$ en $a \in X$. Dan zijn equivalent:*[4]

a. *g is semi-continu naar beneden in $a \in X$.*

b. *Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq g(a)$.* $\diamond$

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g semi-continu naar beneden te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $g(a_n) > g(a) - \epsilon$. Dit impliceert $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(g(a) - \epsilon) = g(a) - \epsilon$. Omdat dit voor alle $\epsilon > 0$ geldt, volgt $\liminf_{n\to\infty} g(a_n) \geq g(a)$.

"$b \Rightarrow a$": uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet semi-continu naar beneden te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ is met $g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$. Nu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en vandaar $\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \geq g(a)$. Maar $\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$, een tegenspraak. Q.e.d.

Laat X en Y verzamelingen zijn en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan is de grafiek van g gedefinieerd door

$$\operatorname{graph}(g) := \{(x, y) \mid x \in X,\ y = g(x)\} \subseteq X \times Y.$$

In het geval dat $Y \subseteq \mathbb{R}$ is ook haar epigrafiek

$$\operatorname{epi}(g) := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \geq g(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

en haar hypografiek

$$\operatorname{hypo}(g) := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \leq g(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

gedefinieerd. Dus, in dat geval, is de grafiek van g de doorsnede van haar epigrafiek en hypografiek.

Als X en Y topologische ruimten zijn, dan heeft het, cartesische producten steeds van de producttopologie voorziend, zin te spreken van dingen als dat $\operatorname{graph}(g)$ gesloten is. Dat betekent dan dus dat $\operatorname{graph}(g)$ een gesloten deel van $X \times Y$ is.

[3]De auteur heeft ook over dat onderwerp een typoscript getiteld "Boven- en benedenlimieten" op zijn webpagina met typoscripten ter beschikking gesteld.

[4]Hier is het "broertje" van deze stelling: g is semi-continu naar boven in a dan en slecths dan als voor elke rij (a_n) uit X er geldt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} g(a_n) \leq g(a)$.

Stelling 2 *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \to \mathbb{R}$ zijn equivalent:*[5]

a. g is semi-continu naar beneden;

b. $\mathrm{epi}(g)$ *is gesloten.*[6] $\diamond$

Bewijs.— "$a \Rightarrow b$": zij $((x_n, y_n))$ een rij uit $\mathrm{epi}(g)$ die convergeert naar $(x, y) \in X \times \mathbb{R}$; dus $g(x_n) \leq y_n$ voor alle n, (x_n) convergeert naar x en (y_n) convergeert naar y. Met Stelling 1 volgt $g(x) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) \leq \liminf g(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dus $(x, y) \in \mathrm{epi}(g)$, zoals gewenst.

"$b \Rightarrow a$": stel $\mathrm{epi}(g)$ is gesloten. Om te bewijzen dat g semi-continu naar beneden is bewijzen we dat voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de benedenniveauverzameling van g met betrekking tot α gesloten is (en kunnen dan Propositie 1 toepassen). Daartoe zij (x_n) een rij uit $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}$ die convergeert naar, zeg, y. We zijn klaar als we laten zien dat $g(y) \leq \alpha$. Omdat $g(y_n) \leq \alpha$, is (x_n, α) een rij uit $\mathrm{epi}(g)$. Deze rij convergeert naar (y, α). Omdat $\mathrm{epi}(g)$ gesloten is, is $(y, \alpha) \in \mathrm{epi}(g)$, dus $g(y) \leq \alpha$. Q.e.d.

Een toepassinkje van Stelling 2 is het volgende: als X een metrische ruimte is en $g : X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding, dan is de grafiek van g gesloten. Inderdaad: omdat g zowel semi-continu naar beneden als naar boven is, is zowel de epigrafiek als de hypografiek van g gesloten. De grafiek van g is, zijnde een doorsnede van die grafieken, weer gesloten.[7]

Stelling 3 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorfse topologische ruimte en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan:*

1. *g is continu $\Rightarrow$* $\mathrm{graph}(g)$ *is gesloten.*
2. *Als Y compact is, dan geldt: g is continu $\Leftrightarrow$* $\mathrm{graph}(g)$ *is gesloten.* $\diamond$

3 Oud maakt nieuw

Propositie 3 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$. Als $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ functies zijn die semi-continu naar beneden zijn in a. Dan:*

1. *voor $\lambda > 0$ is de functie λf_1 semi-continu naar beneden in a.*
2. *de functie $f_1 + f_2$ is semi-continu naar beneden in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij $\epsilon > 0$.

Omdat f_1 semi-continu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $f_1(x) < f_1(a) + \epsilon/\lambda$ $(x \in V)$. Er volgt dat $(\lambda f_1)(x) < (\lambda f_1)(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$.

2. Omdat f_i semi-continu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V_i van a zodanig dat $f_i(x) < f_i(a) + \epsilon/2$ $(x \in V_i)$. Er volgt dat $V_1 \cap V_2$ een omgeving van a is en dat $(f_1 + f_2)(x) < (f_1 + f_2)(a) + e$ voor alle $x \in V_1 \cap V_2$. Q.e.d.

Propositie 4 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$.*

1. *Stel $(g_i)_{i\in I} : X \to \mathbb{R}$ is een familie van functies zodanig dat $g(x) := \sup_{i\in I} g_i(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in X)$.*[8] *Als elke g_i semi-continu naar beneden in a is, dan is de functie $g : X \to \mathbb{R}$ ook semi-continu naar beneden in a.*

[5] Hier is het "broertje": g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. $\mathrm{hypo}(g)$ is gesloten deel van $X \times \mathbb{R}$.

[6] En hier is het "broertje": g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. $\mathrm{hypo}(g)$ is gesloten.

[7] Maar in feite geldt iets veel sterkers (zie het typoscript "Parameterafhankelijkheid van Oplossingen van Vergelijkingen" van de auteur) de grafiek van een continue afbeelding $g : X \to Y$, waar X en Y topologische ruimten zijn met Y hausdorfs, is een gesloten deel van $X \times Y$.

[8] Merk op dat de auteur in dit typoscript niet met functies werkt die de waarde $+\infty$ of $-\infty$ aannemen kunnen.

2. *Als $g_1, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$ functies zijn die semi-continu naar beneden in a zijn, dan is $g := \min(g_1, \ldots, g_m)$ ook semi-continu naar beneden in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij $\epsilon > 0$. Er is een $i \in I$ zodanig dat $g_i(a) > g(a) - \frac{\epsilon}{2}$. Omdat g_i semi-continu naar boven in a is, is er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g_i(a) - \frac{\epsilon}{2}$ $(x \in V)$. Voor $x \in V$ geldt dus $g(x) > g(a) - \epsilon$.

2. Zij $\epsilon > 0$. Er is een omgeving V_i van a zodanig dat $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ $(x \in V_i)$. $V := \cap_{i=1}^m V_i$ is een omgeving van a waarvoor voor alle i geldt $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ $(x \in V)$. Daaruit volgt voor alle $x \in V$ dat $g(x) = \min(g_1(x), \ldots, g_m(x)) > \min(g_1(a), \ldots, g_m(a)) - \epsilon = g(a) - \epsilon$. Q.e.d.

Propositie 5 *Zij X een topologische ruimte. Als $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ positieve functies zijn die semi-continu naar beneden zijn, dan is ook de functie $f_1 f_2$ semi-continu naar beneden.* $\diamond$

Bewijs.— Zij $\lambda \in \mathbb{R}$. We bewijzen dat $\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\}$ open is. Omdat $f_1 f_2 > 0$ is, mogen we $\lambda > 0$ veronderstellen. Nu opmerkend dat

$$\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\} = \cup_{\alpha > 0}(\{x \in X \mid f_1(x) > \alpha\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) > \lambda/\alpha\})$$

een vereniging van open verzamelingen is en dus open is. Q.e.d.

Propositie 6 *Stel $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *als f_1 continu in $a \in \mathbb{R}$ is en f_2 semi-continu naar beneden in $f_1(a)$ is, dan is $f_2 \circ f_1$ semi-continu naar beneden in a.*

2. *Als f_1 continu is en f_2 semi-continu naar beneden is, dan is $f_2 \circ f_1$ semi-continu naar beneden.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij $\epsilon > 0$. Omdat f_2 semi-continu naar beneden in $f_1(a)$ is, is er een $\xi > 0$ zodanig dat voor alle $y \in \mathbb{R}$

$$|y - f_1(a)| < \xi \;\Rightarrow\; f_2(y) < f_2(f_1(a)) + \epsilon.$$

Omdat f_1 continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f_1(x) - f_1(a)| < \xi.$$

Nu geldt, oals gewenst, voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f_2(f_1(x)) < f_2(f_1(a)) + \epsilon.$$

2. Uit 1. Q.e.d.

Propositie 7 *Stel $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ en $f\restriction_{[0,1[}$ is semi-continu naar beneden.*

1. *f is dalend dan en slechts dan als $f\restriction_{[0,1[}$ dalend is.*

2. *f is strikt dalend dan en slechts dan als $f\restriction_{[0,1[}$ strikt dalend is.* $\diamond$

Bewijs.— Alleen de "als-beweringen" zijn niet evident. Deze bewijzen we uit het ongerijmde.

1. Stel dus, dat $f\restriction_{[0,1[}$ dalend is en dat f niet dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0,1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1)(\leq) < f(x_2)$. Omdat $f\restriction_{[0,1[}$ dalend is volgt $x_2 = 1$. Zij $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1) < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semi-continu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2{}' \in \,]x_1, x_2[$ met $f(x_2{}') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1 < x_2{}'$, $x_1, \in x_2{}' \in [0,1[$ en $f(x_2{}') > f(x_1)$, een tegenspraak met de dalendheid van $f\restriction_{[0,1[}$.

2. Stel dus dat $f\restriction_{[0,1[}$ strikt dalend is en dat f niet strikt dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0,1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1) \leq f(x_2)$. Omdat $f\restriction_{[0,1[}$ strikt dalend is volgt $x_2 = 1$. Fixeer $x_1{}' \in \,]x_1, x_2[$ met $f(x_1{}') < f(x_1)$. Omdat $f(x_1{}') < f(x_2)$ is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1{}') < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semi-continu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2{}' \in \,]x_1{}', x_2[$ met $f(x_2{}') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1{}' < x_2{}'$, $x_1{}', \in x_2{}'[0,1[$ en $f(x_2{}') > f(x_1{}')$, een tegenspraak met de dalendheid van $f\restriction_{[0,1[}$. Q.e.d.

4 Rechts- en links-continuïteit

We hebben gezien dat de semi-continuïteitsnoties zich op natuurlijke wijze voordoen door een opsplitsing van de continuïteitsnotie. In het bijzonder zijn semi-continuiteits-noties gedefinieerd voor functies in geval het domein een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Voor dergelijke functies zijn ook de noties van rechts- en linkscontinuïteit gedefinieerd, hetgeen in dat geval een alternatieve opsplitsing van de continuïteitsnotie betreft. Men verwarre deze noties niet. We bekijken dit hier nader.

Zij $g : X \to \mathbb{R}$, waar X een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, en $a \in X$. g heet <u>rechts-continu in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. g heet <u>links-continu in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x \leq a$. g heet <u>links-continu</u> als g links-continu in elk punt van X is en g heet <u>rechts-continu</u> als g rechts-continu in elk punt van X is

Natuurlijk geldt:

$$g \text{ is continu (in } a) \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ is zowel rechts- als links-continu (in } a).$$

Propositie 8 *Zij $g : X \to \mathbb{R}$ stijgend, waar X een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, en $a \in X$. Dan:*

1. *g is semi-continu naar boven in a $\Leftrightarrow$ g is rechts-continu in a.*
2. *g is semi-continu naar beneden in a $\Leftrightarrow$ g is links-continu in a.* $\diamond$

Bewijs.— 1. "$\Rightarrow$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g semi-continu naar boven in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. In het bijzonder $g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $0 \leq g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$ en dus dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Dus g is rechts-continu in a.

"$\Leftarrow$": zij $\epsilon > 0$. Omdat g rechts-continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $|g(x) - g(a)| < +\epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. In het bijzonder $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x < a + \delta$ en dus dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. Dus g is semi-cotninu naar boven in a.

2. Analoog aan 1. Q.e.d.

Dit alles geziend hebbende, zij het duidelijk dat men ook op voor de hand liggende wijze de noties van links semi-continu naar beneden, rechts semi-continu naar beneden, links semi-continu naar boven en rechts semi-continu naar boven invoeren kan:

Definitie 2 Zij X een deelverzameling van $\mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$.

1. g heet <u>links semi-continu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in\,]a - \delta, a]$.

   g heet <u>links semi-continu naar boven</u> als g in elk punt van X links semi-continu naar boven is.

   g heet <u>rechts semi-continu naar boven in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in [a, a + \delta\,[$.

   g heet <u>rechts semi-continu naar boven</u> als g in elk punt van X rechts semi-continu naar boven is.

2. g heet <u>links semi-continu naar beneden in a</u> als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in\,]a - \delta, a]$.

   g heet <u>links semi-continu naar beneden</u> als g in elk punt van X links semi-continu naar boven is.

g heet rechts semi-continu naar beneden in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in [a, a + \delta[$.

g heet rechts semi-continu naar beneden als g in elk punt van X rechts semi-continu naar boven is.

5 Maximaliseerders

Het bewijs van de volgende stelling berust op toepassing van de volgende variant (in termen van gesloten deelverzamelingen) voor de definitie van quasi-compactheid: een toplogische ruimte X is quasi-compact[9] d.e.s.d.a. voor elke familie $(F_i)_{i \in I}$ van gesloten delen van X waarvoor elke eindige doorsnede niet-leeg is, de doorsnede $\cap_{i \in I} F_i$ niet-leeg is.

Stelling 4 *(Lemma van Weierstrass-Lebesgue.) Zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semi-continu naar boven. Dan heeft g een maximaliseerder en de verzameling der maximaliseerders van g is compact.*[10] $\diamond$

Bewijs.— Zij $\alpha := \sup g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zij M de verzameling der maximaliseerders van g. Er geldt dat $M = \cap_{\lambda < \alpha} \{x \in X \mid g(x) \geq \lambda\} = \cap_{\lambda < \alpha} \mathrm{Niv}_\lambda^{\geq}$. Omdat g semi-continu naar boven is, is vanwege Propositie 1, elke $\mathrm{Niv}_\lambda^{\geq}$ gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten. M is zelfs quasi-compact omdat een gesloten deel van een quasi-compacte verzameling quasi-compact is. En omdat X hausdorfss is, is M zelfs compact.

Resteert te bewijzen dat er een maximaliseerder bestaat. Daartoe merken we op dat voor elke $\lambda < \alpha$, $\mathrm{Niv}_\lambda^{\geq}$, niet-leeg is. En dat $\mathrm{Niv}_{\lambda_1}^{\geq} \supseteq \mathrm{Niv}_{\lambda_2}^{\geq}$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2)$. Het boven de stelling genoemde resultaat garandeert daarom dat $\cap_{\lambda < \alpha} \mathrm{Niv}_\lambda^{\geq} \neq \emptyset$. Q.e.d.

Hier is een variant van bovenstaande stelling voor coërcieve functies.

Propositie 9 *Zij X een niet-leeg gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ en $g : X \to \mathbb{R}$ semi-continu naar beneden en coërcief.*[11] *Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact.* $\diamond$

Bewijs.— Zij $\alpha := \inf g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zij M de verzameling der minimaliseerders van g. Er geldt dat $M = \cap_{\lambda > \alpha} \{x \in X \mid g(x) \leq \lambda\} = \cap_{\lambda > \alpha} \mathrm{Niv}_\lambda^{\leq}$. Omdat g semi-continu naar beneden is, is vanwege Propositie 1, elke $\mathrm{Niv}_\lambda^{\leq}$ gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten. M is ook begrensd, want anders zou er een rij (z_n) uit M zijn met $\lim_{n \to \infty} \parallel z_n \parallel = \infty$ en dan zou $\lim_{n \to \infty} g(z_n) = \infty$ Er volgt dat M compact is.

Fixeer een rij (z_n) in X met $\lim_{n \to \infty} g(z_n) = \alpha$. De coërciviteit van g impliceert dat (z_n) begrensd is. Bolzano-Weierstrass garandeert dat dat (z_n) een limietpunt heeft; zij (y_n) een deelrij van (z_n) met limiet, zeg, y. Omdat X gesloten is, is $y \in X$. Omdat g semi-continu naar benenden is, garandeert Stelling 1 dat $\alpha = \lim_{n \to \infty} g(y_n) = \liminf_{n \to \infty} g(y_n) \geq g(y)$. Daauit $g(y) = \alpha$. Dus y is een minimaliseerder van g. Q.e.d.

6 Dekpuntstelling

Stelling 5 *Stel I is een eigenlijk interval van $\mathbb{R}$ en $g : I \to \mathbb{R}$ een functie die links semi-continu naar boven en rechts semi-continu naar beneden is. Als er $a, b \in I$ met $a < b$, $a < g(a)$ en $b > g(b)$ bestaan, dan heeft g een dekpunt.* $\diamond$

[9] Om misverstanden te voorkomen: een topologische ruimte is compact als ze quasi-compact en haussdorfs is.

[10] Hier is het "broertje": zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}$ semi-continu naar beneden. Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact.

[11] Dat g coërcief is betekent dat voor elke rij (x_n) in X met $\lim_{n \to \infty} \parallel x_n \parallel = \infty$ er geldt dat $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \infty$.

Bewijs.— Definieer recursief de rijtjes of rijen $(a_n), (b_n)$ en (c_n), door:

$$a_0 := a, \; b_0 := b$$

en voor $n \geq 1$:

$$c_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Als $g(c_n) = c_n$, dan stop, anders definieer verder

$$\begin{cases} a_n := c_n \text{ en } b_n := b_{n-1} \text{ als } c_n < g(c_n), \\ a_n := a_{n-1} \text{ en } b_n := c_n \text{ als } c_n > g(c_n). \end{cases}$$

Als deze procedure stopt, dan heeft g een dekpunt. Als ze niet stopt, dan hebben we rijen $(a_n), (b_n)$ en (c_n) Men ziet snel in dat $a_0 \leq a_n \leq c_{n+1} \leq b_n \leq b_0$, de rij (a_n) is stijgend, de rij (b_n) is dalend en $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Er volgt dat (a_n) en (b_n) convergeren naar eenzelfde punt x.

Men ziet ook snel in dat $a_n < g(a_n)$ voor alle n en $b_n > g(b_n)$ voor alle n. Dat impliceert

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} g(a_n), \quad x = \lim_{n\to\infty} b_n \geq \liminf_{n\to\infty} g(b_n).$$

Omdat g te x links semi-continu naar boven is en $a_n \leq x$ is volgt, $\limsup_{n\to\infty} g(a_n) \leq g(x)$ en dus nu

$$x \leq g(x).$$

Omdat g te x links semi-continu naar beneden en $b_n \geq x$ is volgt,

$$g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} g(b_n)$$

en dus nu

$$g(x) \leq x.$$

Dus $g(x) = x$. Q.e.d.