REKEN JE RIJK

2002

Verbeterde versie 0.8

Dit typoscript gaat over rente en aanverwante zaken. Het is vrij elementair van aard.

Uiteraard houd ik me aanbevolen voor op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot een verdere verbetering van het typoscript.

1 Rente

In heel wat landen in de reële wereld kan men *geld tegen rente op een bank zetten* . Dat betekent dat men voor een bepaalde tijdsduur geld uitleent aan een institutie die men met *bank* betiteld. Na het verstrijken van die tijdsduur ontvangt men dan niet alleen het oorspronkelijke bedrag maar ook nog een extra bedrag, de zogenaamde *rente*,[1] terug.[2]

Er zijn verschillende soorten van renten. Contracten, opgesteld door de bank, leggen precies vast hoe een en ander geregeld is. Het onderstaande bespreekt slechts drie eenvoudige contracten (die slechts globaal met bankpraktijken overeenkomen): simpele rente, samengestelde rente en continue rente. De fundamentele notie, die alles bepaalt, zal daarbij de zogenaamde *rentevoet* (per tijdspanne) zijn. Deze zullen we aanduiden met r. Deze r is een getal groter of gelijk aan 0 en veelal geldt ook nog $r \leq 1$. Het is gebruikelijk r in procenten uit te drukken. Dat betekent het volgende: r komt overeen met $100r\%$.

Vaak wordt voor de met de rentevoet geassocieerde tijdspanne één jaar gekozen.[3]

> *Simpele rente*: als men een bedrag m voor M tijdspannen uitleent tegen een rentevoet r per tijspanne, dan ontvangt men na verstrijking van de M tijdspannen het bedrag $m(1 + Mr)$.
>
> *Samengestelde rente*: als men een bedrag m voor M jaren uitleent tegen een rentevoet r per tijdspanne, dan ontvangt men na verstrijking van de M tijdspannen het bedrag $m(1 + r)^M$.
>
> *Continue rente*: als men een geldbedrag m voor M jaren uitleent tegen een rentevoet r per tijspanne, dan ontvangt men na verstrijking van de tijdspanne de m tijdspannen het bedrag me^{rM}.

We zien: de simpele rente is gelijk aan mMr, de samengestelde is $m((1 + r)^M - 1)$ en de continue is $m(e^{rM} - 1)$.

Opgave 1 *Laat zien dat continue rente tenminste evenveel oplevert als samengestelde rente en dat samengestelde rente tenminste evenveel oplevert als simpele rente.*

Opgave 2 *Vergelijk de rente verkregen door een geldbedrag van* 1000 *gulden voor twee jaar op een bank te zetten tegen simpele rente met een rentevoet van* 4% *per jaar*[4] *en tegen samengestelde rente met een rentevoet van* 4% *per* 4 *maanden.*

Bekijken we de bovenstaande contracten nu nader. Het contract van simpele rente vertoont in de vorm zoals hierboven gepresenteerd een mankement. Om dat te zien, beschouwen we eens de buurvrouw van Pietje Puk die een positief geldbedrag m tegen simpele rente uit kan zetten met een positieve rentevoet r. Stel zij gaat precies één jaar met dat bedrag aan de slag. Dat levert haar een bedrag $Y_1 := m(1 + r)$ op. Als zij het bedrag m voor een half jaar op bank zou zetten, ontvangt zij aan het einde van die tijdspanne een bedrag $m(1 + \frac{r}{2})$. Dit bedrag zet zij nu weer voor een half jaar uit tegen rente.[5] Dat levert dan $Y_2 := m(1 + \frac{r}{2})(1 + \frac{r}{2}) = m(1 + \frac{r}{2})^2$. Men ziet meteen dat $Y_2 > Y_1$. De buurvrouw van Pietje Puk, homo economicus zijnde, is daarmee uiteraard

[1] Synoniem: *interest*.

[2] Dat een bank rente geeft, heeft weinig met liefdadigheid te maken, maar des te meer met het feit dat een bank met dat geld voor haar interessante dingen kan doen. In dat verband merken we nog op dat in de islamitische dat wat anders ligt. Rente is namelijk in de Islam volgens de preciezen niet toegestaan omdat het volgens de Koran immoreel is om geld te verdienen zonder dat daarbij arbeid tegenover staat. Maar in de meeste islamitische landen is het heffen van rente toch toegestaan, zij het dat er enkele principiële banken zijn die zich aan die regel houden.

[3] Met "één jaar" bedoelt men dan bijvoorbeeld de tijdspanne tussen een bepaalde datum en diezelfde datum een jaar later (die er niet altijd zal zijn als het om 29 februari gaat). Over dit soort van fijnheden zullen we verder niet moeilijk gaan doen.

[4] D.w.z. $r = 0,04$ per jaar.

[5] Op dezelfde bank, of om niet op te vallen op een andere.

in haar nopjes. Dit spelletje kan zij zelfs n maal herhalen. In het algemeen krijgt ze voor n maal gedurende een tijdspanne van $1/n$ jaar geld op de bank te zetten

$$Y_n := m(1 + \frac{r}{n})^n.$$

Het is niet moeilijk te laten zien dat des groter n des te groter Y_n is, dus

$$\cdots Y_4 > Y_3 > Y_3 > Y_2 > Y_1. \qquad (1)$$

Theoreten worden nu verlokt door het volgende gedachte-experiment: de buurvrouw kan zo vaak zij wil en zou kunnen willen geld van de bank halen en er weer op zetten. Dat betekent als het ware dat zij $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$ kan ontvangen. Gebruikmakend van de bekende wiskundige formule $e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^{1/n}$ vinden we voor deze limiet

$$Y \ = \ me^r.$$

Het is een wiskundig bekend resultaat dat $e^x > (1 + \frac{x}{n})^{1/n}$ voor alle $x > 0$ en n. Dat levert

$$Y \ > Y_n. \qquad (2)$$

Dit gedachte-experiment verklaart ook de naam van "continue rente" waar men voor $n \to \infty$ op uit komt.

In de praktijk schrijven banken, om een en ander te ondervangen, rente doorgaans uit op bepaalde tijdstippen (bijvoorbeeld 31 december), eventueel tussentijds en hanteren verschillende rentevoeten voor verschillende tijdsspannen dat men geld uitleent en voor mogelijkheden van opnemen.

Zowel in het geval van samengestelde rente als in het geval van continue rente heeft de homo economicus niets meer aan het boven beschreven spelletje.

Opgave 3 *Laat zien waarom dat zo is.*

Opgave 4 *Na hoeveel jaar is een bedrag van* 5000 *gulden dat men uitleent tegen een samengestelde rentevoet van* 10% *per jaar verdubbeld? Laat zien dat* $T = \ln 2/\ln(1+r)$ *de algemene formule voor de verdubbeltijd bij een samengestelde rentevoet* r *is.*

$\ln 2 \approx 0,7$ en de benaderingsformule $\ln(1 + x) \approx x$ voor kleine $|x|$ leveren voor de verdubbeltijdformule uit Opgave 4 voor kleine samengestelde rentevoeten (de voor de praktijk nuttig om te onthouden formule)

$$T \approx \frac{0,7}{r}. \qquad (3)$$

En indien we r in procenten uitdrukken dan wordt deze formule $T \approx \frac{70}{r}$. In onze reële wereld ligt r normaliter in de buurt van 5%. Volgens (3) bedraagt de verdubbeltijd dan 14 jaar; met de correcte formule vinden we daarentegen $14,20..$ jaar.

In de rest van dit typoscript zullen we met "rente" steeds "samengestelde rente" bedoelen.

2 Inflatie

Om te beoordelen of het zich loont om geld voor een bepaalde tijdspanne op een bank te zetten, is het onder andere van belang te weten hoe het met de inflatie zit.[6] *Inflatie* is een macro-economisch begrip. Om het precies te definiëren valt nog niet mee. De discussie over de juiste methode om

[6] Een van de andere factoren is het feit dat de overheid rente normaliter belast en dat de rente (over langere tijdsspannen) onzeker is.

consumentenprijsstijgingen te berekenen woedt al vele decennia. Het staat aan de basis van een indrukwekkende hoeveelheid beleidsbeslissingen. Grofweg betreft inflatie de (periodieke) percentuele stijging van consumentenprijzen.

Wij introduceren inflatie hier als volgt in de context van een consument die slechts één goed kan kopen. De *koopkracht* van een geldbedrag m is de hoeveelheid van het goed dat de consument voor dat bedrag kan kopen. Als p de prijs van het goed is, dan is de koopkracht van m dus gelijk aan $\frac{m}{p}$. Stel nu dat de prijs van het goed in het begin van de tijdspanne p is en p' aan het einde ervan. Dan heet de relatieve prijsverandering, i.e. het getal

$$\pi = (p' - p)/p$$

de *inflatievoet* (over de tijdspanne). Er geldt blijkbaar

$$p' = (1 + \pi)p.$$

Indien $\pi > 0$ spreekt men van *inflatie* en indien $\pi < 0$ spreekt men van *deflatie*.

> Indien r de rentevoet over de tijdspanne is, dan is de *reële rentevoet* ρ (over de tijdspanne) gedefinieerd als de relatieve koopkrachtsverandering van een geldbedrag uitgezet tegen rente.

Er geldt

$$1 + \rho = (1 + r)/(1 + \pi). \tag{4}$$

(Merk op dat de grootte van het geldbedrag er blijkbaar niet toe doet.)

Opgave 5 *Toon deze formule aan.*

In de reële wereld is het normaliter zo dat men met een zelfde hoeveelheid geld doorgaans steeds minder kan kopen in de toekomst omdat de prijzen van goederen de neiging hebben te stijgen. Inflatie is dus het normale verschijnsel.

Uit de wiskunde weten we dat $1 + x \approx 1 - x$ voor kleine $|x|$. Daaruit haalt men voor kleine π de in de praktijk veel gehanteerde formule

$$\rho \approx r - \pi.$$

Opgave 6 *Een klant koopt een bankstel in een warenhuis. De normale prijs is* 5000 *gulden. Maar nu is er vanwege een reclame aanbieding een korting van* 5%. *Verder had de klant sowieso al altijd een korting van* 10%. *De verkoper geeft daarom een totale korting van* 15%. *Deed hij daaraan juist? Zo nee, hoeveel guldens (en in wiens voordeel) verrekende hij zich?*

3 Toekomstige en huidige waarde

Beschouw een economisch subject dat er zeker van is in het begin van elk van een gegeven aantal T van opeenvolgende tijdsspannen van gelijke lengte, verder *perioden* te noemen, een geldbedrag te ontvangen.[7] We nummeren deze perioden successievelijk met $t = 0, 1, \ldots, T - 1$ en denken ons het begin van periode 0 overeen te laten komen met het huidige tijdstip.[8] Laat m_t de geldbedragen in kwestie zijn. We laten hier negatieve bedragen ook toe. Het economisch subject ontvangt dan geen geld, maar moet betalen. De rij van geldbedragen $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_{T-1})$ noemt men een *(discrete) geldstroom (ter lengte T)*. Wat, denkt u, zou dit economisch subject liever hebben: elk der bedragen m_t in (het begin van[9]) periode t, of al die bedragen ineens in periode 0? Wellicht het

[7] Menige reële-wereld-interpretatie kan alleen maar zinvol zijn in het geval van niet al te grote tijdsspannen en in afwezigheid van onzekerheid. Men denke daarbij onder andere aan de (nog steeds geldige) uitspraak “Mensch bedenk dat ge sterven zult.”.

[8] Natuurlijk staat het vrij ook met bijvoorbeeld $t = 1, 2, \ldots, T$ te nummeren.

[9] In het vervolg laten we de toevoeging “het begin van” vaak weg.

laatste, want dat economisch subject kan dan de geldbedragen op de bank zetten tegen rente zodat hij met het tweede alternatief meer geld kan maken. In dat verband worden nu de begrippen van "toekomstige waarde" en "huidige waarde" ingevoerd. Niks belet ons daarbij soms ook geldstromen $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2, \ldots)$ ter lengte $T = \infty$ toe te laten.[10] (Dat doen we omdat sommige economische modellen deze situatie beschouwen.)

> De *toekomstige waarde* van een geldstroom is per definitie het bedrag dat de geldstroom oplevert aan het einde van de tijdspanne door de geldbedragen direct bij ontvangst op de bank tegen (samengestelde) rente te zetten. We duiden dat bedrag aan met TW.
>
> De *huidige waarde*[11] van een geldstroom is gelijk aan het geldbedrag dat men in het begin van de tijdspanne op de bank moet zetten om aan het einde van de tijdspanne een bedrag ter grootte van de TW van die geldstroom op te leveren. We duiden dat bedrag aan met HW.

Men zou ook kunnen zeggen: dat de huidige waarde HW van een geldstroom gelijk is aan het bedrag dat men in het begin van de tijdspanne voor die geldstroom maximaal over zou hebben om die geldstroom dan te ontvangen.

We gaan nu formules voor de huidige en toekomstige waarde van een geldstroom $(m_0, m_1, \ldots)$ ter lengte T bij een (tijdonafhankelijke) rentevoet r (over de tijdspanne van de periode) geven. Het is nu redelijk naïef zoiets te denken als dat de toekomstige waarde van die geldstroom

$$\mathrm{NW} := m_0 + m_1 + \cdots + m_{T-1}$$

zou zijn. Wel correct is:

$$\mathrm{TW} \;=\; m_0(1+r)^T + m_1(1+r)^{T-1} + \cdots + m_{T-1}(1+r)^1 = \sum_{t=0}^{T-1} m_t(1+r)^{T-t};$$

$$\mathrm{HW} \;=\; m_0 + \frac{m_1}{1+r} + \cdots + \frac{m_{T-1}}{(1+r)^{T-1}} \;=\; \sum_{t=0}^{T-1} \frac{m_t}{(1+r)^t}.$$ [12]

Inderdaad, als men het bedrag m_t in het begin van periode t op de bank zet, staat het aan het einde van de tijdspanne $T-t$ perioden op de bank hetgeen dan een bijdrage $m_t(1+r)^{T-t}$ oplevert. De som van al deze bijdragen geeft precies bovenstaande formule voor TW. Omdat de geldstroom $(x, 0, 0, \ldots)$ ter lengte T een toekomstige waarde gelijk aan $x(1+r)^T$ heeft, volgt nu uit de definitie van HW dat

$$\mathrm{TW} = (1+r)^T\ \mathrm{HW}, \tag{5}$$

waaruit de gegeven formule voor HW.

Ten duidelijkste, als alle $m_t \geq 0$, dan

$$\mathrm{HW} \leq \mathrm{NW} \leq \mathrm{TW}.$$

Het getal

$$\delta := 1/(1+r)$$

noemt men nog *disconteringsfactor*.

[10] Wel zal in contexten van oneindig veel perioden het prettig zijn als $r < 1$ in verband met het vermijden van divergentieproblemen.

[11] Synoniem: *contante waarde*.

[12] Indien $T = \infty$, zijn dit soort van uitdrukkingen te interpreteren als limiet.

Voor de berekening van TW en HW in het belangrijke geval dat alle m_t gelijk zijn aan m is de[13] formule voor de meetkundige reeks van belang.[14] We vinden daarmee voor $r > 0$ de volgende formules:[15]

$$\text{HW} = \begin{cases} m(1+\frac{1}{r}) \text{ indien } T = \infty, \\ m\frac{1+r}{r}(1-(1+r)^{-T}) \text{ indien } T \text{ eindig is.} \end{cases} \tag{6}$$

$$\text{TW} = m(1+r)\frac{(1+r)^T - 1}{r} \text{ indien } T \text{ eindig is.} \tag{7}$$

Opgave 7 *Leidt formules (6) en (7) af.*

Opgave 8 *Bereken de toekomstige en huidige waarde van de volgende geldstromen:*

a. $(10, 3, 5, 6, 9, 7)$ *bij* $r = 1/10$*;*

b. $(5, 5, \ldots)$ *(ter lengte* ∞*) bij* $r = 3/100$*;*

c. $(10, 10, \ldots, 10)$ *(ter lengte* 25*) bij willekeurige* r*;*

d. $(-10, 3, 5)$ *bij* $r = 1/10$.

Uit de formules voor TW en HW volgt:

> De toekomstige waarde van een geldstroom van niet-negatieve bedragen is een strikt stijgende functie van de rentevoet en zijn huidige waarde is een strikt dalende functie daarvan.

De enigszins abstracte noties van toekomstige en huidige waarde vinden, zoals al uit sommige opgaven hierboven mocht blijken, hun toepassing in allerlei berekeningetjes aan financiële reële-wereld-probleempjes die een apart deelgebied in de economie vormen: de *financiële wiskunde*. Een *actuaris* is een specialist op dit gebied.

Vooral formule (7) is interessant, omdat zij bijvoorbeeld weergeeft hoeveel geld men heeft als men voor T jaar een bedrag ter grootte m op de bank tegen rente uitleent met een rentevoet r. Dus bijvoorbeeld, als men dertig jaar lang een bedrag ter grootte van 1000 gulden op de bank zet tegen een rentevoet van 5% per jaar, dan heeft men uiteindelijk $1000 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot \frac{1{,}05^{30}-1}{0.05} = 69760{,}7..$ gulden.

Opgave 9 *Los de volgende vragen op door deze eerst te herformuleren in termen van* HW *of* TW.

a. Bereken het bedrag dat voor 3 *jaar uitgezet tegen een rente van* 4% *per jaar,* 7740 *gulden oplevert.*

b. Hoeveel zou men 300 jaar geleden op de bank hebben moeten zetten tegen een rentevoet van 5 *procent per jaar om nu een bedrag van* 10 *miljoen gulden te hebben?*

Opgave 10 *a. Stel U zet een bedrag* A *voor* T *jaar op de bank uit tegen een rentevoet* r *waarbij U er aan het eind van elk jaar een constant bedrag* a*, van opneemt. Laat zien dat aan het einde van jaar* $T-1$ *er een bedrag* $D_T := (1+r)^T(A - \frac{a}{r}) + \frac{a}{r}$. *op de bank staat.*

b. Bepaal a *zodanig dat* $D_T = 0$.

c. Stel U leent een bedrag A *tegen een rentevoet* r *dat U in* T *jaar wilt aflossen door middel van een vast bedrag* a *per jaar. Bepaal een formule voor (de zogenaamde* annuïteit*)* a.

d. Bepaal een formule voor de rente die U in jaar t *betaalt.*

---

[13]voor elke economist verplicht bekende

[14]Ter herinnering: $\sum_{t=0}^{n} x^t = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ als $|x| < 1$, waaruit $\sum_{t=0}^{\infty} x^t = \frac{1}{1-x}$ als $|x| < 1$.

[15]Voor $r = 0$ is een en ander triviaal. Deze formules leert U natuurlijk niet van buiten, maar U leidt ze af als U ze nodig hebt.

Opgave 11 *Pietje Puk is uit (ethisch) principiële redenen tegen inkomensverschillen. Zijn buurman, de heer du Flo, die daar totaal anders over denkt, stelt voor om eens twee personen te bekijken die op dezelfde dag geboren worden en waarvan de een hoogleraar en de ander fabrieksarbeider wordt en voor hen de huidige waarde van hun geldstromen te bekijken die ze in de loop van hun leven ontvangen. Hij stelt: de huidige waarde* HW_h *voor de hoogleraar en* HW_a *voor de fabrieksarbeider verschillen niet zoveel van elkaar en daarom zijn die inkomensverschillen in orde.*

Om vlug een idee te krijgen of dit argument hout snijdt, beschouwt Pietje Puk de volgende eenvoudige situatie: een hoogleraar die vanaf zijn 38ste tot en met zijn 65ste verjaardag 100000 *gulden per jaar verdient en een fabrieksarbeider die vanaf zijn 16e tot en met zijn 65ste verjaardag* 25000 *gulden per jaar verdient. (Uiteraard: De fabrieksarbeider begint veel eerder met verdienen dan de hoogleraar, maar wel flink wat minder.) Voor de rentevoet neemt hij* 10%. *De inkomensstroom van de hoogleraar is dus* $(0, \dots 0, 10^5, \dots 10^5)$ *(*38 *maal een* 0 *en* 27 *maal een* 10^5*) en die van de fabrieksarbeider is* $(0, \dots 0, 25000, \dots, 25000)$ *(*16 *maal een* 0 *en* 49 *maal een* 25000*).*

a. *Bepaal* $\mathrm{HW}_a/\mathrm{HW}_h$.

b. *In hoeverre is het antwoord bij a afhankelijk van het feit dat men vanaf de geboorte begint te rekenen?*

c. *Is er iets op tegen om in plaats van de huidige waarde de toekomstige waarde te bekijken?*

d. *Beantwoord a in geval van een rentevoet van* 5% *en* 1%.

e. *We gaan nu de berekeningen herhalen door nu alle specifieke getallen algemeen te houden. Deze getallen zijn: het jaar* l_a *waarop de arbeider gaat verdienen, het jaar* l_h $(\geq l_a)$ *waarop de hoogleraar gaat verdienen, het jaar* L $(\geq l_h)$ *waarop beiden ophouden met werken, het jaarsalaris* m_h *van de hoogleraar, het jaarsalaris* m_a *van de arbeider, de rentevoet* r. *Leidt de volgende formule af:*
$$\frac{\mathrm{HW}_a}{\mathrm{HW}_h} = \frac{m_a}{m_h}(1+r)^{l_h - l_a}\frac{1-(1+r)^{l_a - L}}{1-(1+r)^{l_h - L}}.$$

f. *Interpreteer de formule in e.*

Tenslotte een gemeen aardigheidje:

Opgave 12 *Moet men meer of minder dan* π *cent een schrikkeljaar lang per seconde ontvangen om na dat jaar een miljoen gulden in totaal te hebben ontvangen? (Antwoord graag binnen tien seconden.)*

4 Investeringsprojecten

De huidige waarde wordt in de praktijk gebruikt om investeringsprojecten (i.e. investeringen in machines, gebouwen, olieplatforms, et cetera) te beoordelen.[16] Bekijken we dat wat nader.

Een *investeringsproject* met een looptijd T is per definitie een eindige geldstroom $(m_0, m_1, \dots, m_T)$ ter lengte $T+1$ waarbij $m_0 < 0$ is. De interpretatie zij: door m_0 te investeren in periode 0 (de "benodigde aanvangsinvestering") ontvangt men in elke periode $t = 1, \dots, T$ (een "netto bate") m_t.

Opgave 13 *Een bedrijf moet kiezen tussen de volgende drie investeringsprojecten met een looptijd van* 5 *jaar bij een rentevoet van* 10%*:*

$A = (-1000, 300, 400, 400, 500, 500)$;
$B = (-1000, 200, 300, 400, 600, 800)$;
$C = (-1000, 500, 400, 300, 300, 200)$.

[16] Veel studenten in de bedrijfseconomie worden daarmee opgevoed. Echter concreet toepassen van deze notie in de praktijk ter beoordeling van investeringsprojecten leidt (vanwege onzekerheden) veelal tot heel verkeerde uitkomsten. De reden dat dat toch gebeurt is dat het toepassen van een correcte investeringsregel gebruikt maakt van geavanceerde wiskundige technieken zoals Ito-calculus en dynamisch programmeren.

Welk dezer projecten wordt gekozen als het bedrijf kiest voor het project met de hoogste huidige waarde?

De *interne rentevoet* van een investeringsproject $(m_0, m_1, \ldots, m_T)$ is gedefinieerd als de rentevoet α waarbij de huidige waardige van het project nul is. Natuurlijk geldt de volgende formule:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{m_t}{(1+\alpha)^t} = 0.$$

Het kan bewerkelijk zijn de α middels deze formule te bepalen; een rekenmachientje of computerprogramma kan in dat verband handig zijn.

Ervan uitgaande dat een investeringsproject gefinancierd wordt met geleend geld, zal een economisch subject slechts investeringsprojecten aannemen waarvoor de interne rentevoet α groter of gelijk aan de rentevoet r is. Immers de huidige waarde van een investeringsproject is een dalende functie van r, terwijl die bij $r = \alpha$ precies gelijk aan nul is.

Opgave 14 *Bepaal de interne rentevoeten van de investeringsprojecten in Opgave 13.*

Het is natuurlijk zich af te vragen of het criterium van de grootste huidige waarde voor investeringsprojecten (zoals in Opgave 13) hetzelfde is als het criterium van de hoogste interne rentevoet? Het (misschien verrassende) antwoord is "nee" zoals Opgaven 13 en 14 aantonen.

Opgave 15 *Iemand koopt voor fl 5839,- een stuk papier dat na 20 jaren ingewisseld kan worden voor fl 20928,-. De belastingdienst geeft van het aankoopbedrag de helft terug. Tegen welke rente zou men* 20 *jaar lang een bedrag van fl 2919,50 moeten uitzetten om na die jaren een bedrag van fl 20928,- te hebben?*

Opgave 16 *Iemand stelt U de volgende vraag: ik zorg ervoor dat Uw nabestaanden na 300 jaar* 100 *miljoen gulden ontvangen als U mij nu een bedrag van X gulden geeft; wat is Uw maximale X?*

5 Oplossingen

Oplossing 1 De bekende wiskundige ongelijkheden $e^x \geq 1 + x$ en $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ impliceren $me^{\frac{M}{L}r} \geq m(1+r)^{\frac{M}{L}} \geq m(1 + \frac{M}{L}r)$.

Oplossing 2 Simpele: $1000(1 + 2 \cdot \frac{4}{100}) = 1080$ gulden. Samengestelde: $1000(1 + \frac{4}{100})^{24/4} = 1265,31..$ gulden.

Oplossing 3 $Y_1 = me^r$, $Y_2 = (me^{r/2})e^{r/2} = me^r, \ldots, Y_n = m(e^{r/n})e^{r/n} \cdots e^{r/n} = me^r$.

Oplossing 4 $10.000 = 1,1^M \cdot 5000$, waaruit $M = 7,27..$ jaar. Algemene formule vindt men uit oplossen van $2m = (1+r)^T m$.

Oplossing 5 De koopkracht van m was $\frac{m}{p}$ en wordt na uitlening $\frac{m(1+r)}{p'}$. De relatieve verandering is dus $\rho = (\frac{m(1+r)}{p'} - \frac{m}{p})/\frac{m}{p}$. Daaruit volgt (4).

Oplossing 6 Nee: de klant moet nu $5000 - \frac{15}{100}5000 = 4250$ gulden betalen, maar zou vanwege de reclame $5000 - \frac{5}{100}5000 = 4750$ gulden moeten betalen over welk hij bedrag nog 10% korting krijgt, dus zou hij uiteindelijk $4750 - \frac{10}{100}4750 = 4275$ gulden moeten betalen. De verkoper verrekende zich dus 25 guldens in het voordeel van de klant.

Oplossing 7 $\mathrm{HW} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{m}{(1+r)^t} = m \sum_{t=0}^{T-1} (\frac{1}{1+r})^t$. Indien $T = \infty$, is dit gelijk aan $m \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = m(1 + \frac{1}{r})$ en indien T eindig is, is dit gelijk aan $m \cdot \frac{1-(\frac{1}{1+r})^T}{1-\frac{1}{1+r}} = m\frac{1+r}{r}(1 - (1+r)^{-T})$.

$$\mathrm{TW} = \sum_{t=0}^{T-1} m(1+r)^{T-t} = m(1+r)^T \sum_{t=0}^{T-1} (\frac{1}{(1+r)})^t = m(1+r)^T \frac{1-(\frac{1}{1+r})^T}{1-\frac{1}{1+r}} = m(1+r)\frac{(1+r)^T - 1}{r}.$$

Oplossing 8 a. $\mathrm{HW} = 10 + \frac{3}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} + \frac{6}{1,1^3} + \frac{9}{1,1^4} + \frac{7}{1,1^5} = 31,86...$ Volgens (5), $\mathrm{TW} = (1+r)^6\mathrm{HW} = 56,44...$

b. $\mathrm{HW} = 21\frac{2}{3}$. $\mathrm{TW} = \infty$.

c. Volgens (6), $\mathrm{HW} = 10\frac{1+r}{r}(1 - (1+r)^{-25})$, $\mathrm{TW} = (1+r)^{25}\mathrm{HW} = 10\frac{1+r}{r}((1+r)^{25} - 1)$.

d. $\mathrm{HW} = -3,14..$, $\mathrm{TW} = -4,18..$

Oplossing 9 a. Herformulering: bepaal het geldbedrag m zó dat de geldstroom $(m, 0, 0)$ bij $r = 4/100$ een toekomstige waarde van 7740 gulden heeft. Op te lossen $7740 = m \cdot 1,04^3$, waaruit $m = 6880,83..$ gulden.

b. Herformulering: bepaal het geldbedrag m zó dat de geldstroom $(m, 0, 0, \ldots)$ (ter lengte 300) bij $r = 5/100$ een toekomstige waarde van 10^7 heeft. Op te lossen $10^7 = m \cdot 1,05^{300}$, waaruit $m = 4,397..$ gulden.

Oplossing 10 a. Op $t = 1$ (i.e. aan het einde van periode 0) is het bedrag dat nog op de bank staat $D_1 = A(1+r) - a$. Op $t = 2$ is het $D_2 = D_1(1+r) - a = A(1+r)^2 - a(1+(1+r))$. Et cetera. Op $t = T$ is het bedrag $D_T = A(1+r)^T - a(1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{T-1}) = A(1+r)^T - a\frac{1-(1+r)^T}{1-(1+r)} (= (1+r)^T(A - \frac{a}{r}) + \frac{a}{r})$.

b. D_T gelijk aan nul stellende vindt men uit a dat $a = \frac{rA}{1-(1+r)^{-T}}$.

c. Dat is abstract gezien hetzelfde als het vorige onderdeel. De interpretatie van D_t is de schuld die men in periode t heeft. Dus weer is $a = \frac{r}{1-(1+r)^{-T}}A$.

d. Met $D_0 = A$ bedoelt men daarmee het bedrag rD_{t-1}, hetgeen volgens a gelijk is aan $a - (1+r)^{t-1}(a - rA)$.

Oplossing 11 a. Voor de hoogleraar geldt $\mathrm{HW}_h = \sum_{t=0}^{37} \frac{0}{1,1^t} + \sum_{t=38}^{64} \frac{100.000}{1,1^t} = \sum_{t=0}^{26} \frac{100.000}{1,1^{t+38}} = 1,1^{-38} \cdot 100.000 \cdot \frac{1-(\frac{10}{11})^{27}}{1-\frac{10}{11}} = 27165,14..$ gulden. Voor de fabrieksarbeider geldt $\mathrm{HW}_a = \sum_{t=0}^{15} \frac{0}{1,1^t} + \sum_{t=16}^{64} \frac{25000}{1,1^t} = 1,1^{-16} \cdot 25000 \sum_{t=0}^{48} \frac{1}{1,1^t} = 1,1^{-16} \cdot 25.000 \cdot \frac{1-(\frac{10}{11})^{49}}{1-\frac{10}{11}} = 59287,21..$ gulden. Daaruit $\mathrm{HW}_a/\mathrm{HW}_h = 2,18...$

b. Niet afhankelijk daarvan.

c. Nee, vanwege formule (5).

d. $\mathrm{HW}_a/\mathrm{HW}_h = 0,90..$ en $\mathrm{HW}_a/\mathrm{HW}_h = 0,50...$

e. $\mathrm{HW}_h = \sum_{t=l_h}^{L-1} \frac{m_h}{(1+r)^t} = \frac{m_h}{r(1+r)^{l_h - 1}}(1 - (1+r)^{l_h - L})$. Net zo $\mathrm{HW}_a = \frac{m_a}{r(1+r)^{l_a - 1}} (1 - (1+r)^{l_a - L})$. Daaruit volgt de gewenste formule.

f. Bij hele hoge rentevoet, zal de HW van de hoogleraar, die later dan de fabrieksarbeider begint te verdienen, ongeveer gelijk aan nul zijn, terwijl die van de fabrieksarbeider vanwege zijn inkomsten in de eerste periode vrij aanzienlijk kan zijn. Bij hele lage rentevoet doet een verschijnsel van omgekeerde aard zich voor. Als $L - l_a$ en $L - l_h$ groot zijn, krijgen we $\frac{\mathrm{HW}_a}{\mathrm{HW}_h} \approx \frac{m_a}{m_h}(1+r)^{l_h - l_a}$. De voorwaarde $\mathrm{HW}_a = \mathrm{HW}_h$ komt dan in benadering neer op $\frac{m_a}{(1+r)^{l_a}} = \frac{m_h}{(1+r)^{l_h}}$.

Oplossing 12 $3,162..$ cent.[17]

Oplossing 13 De huidige waarden zijn respectievelijk $555,79..$, $636,82..$, $339,60...$ Dus project B.

Oplossing 14 Respectievelijk $28,0..\%$, $27,4..\%$, $24,8..\%$.

Oplossing 15 Deze vraag komt neer op de vraag bij welke rente r de TW van de geldstroom $(2919\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0)$ ter lengte 20 gelijk is aan 19835. Oplossen van $2919\frac{1}{2} \cdot (1+r)^{20} = 20928$ geeft $r = 10,34..\%$.

Oplossing 16 Er is iets voor te zeggen om voor die X de huidige waarde van de geldstroom $(0, \ldots, 0, 10^8)$ ter lengte 300 te nemen. Deze is ongeveer 1 cent indien $r = 8\%$ (hetgeen zo ongeveer de gemiddelde rente over langere termijnen is).

[17] In grove benadering, en dat is grappig, $\pi = 3,141..$ cent.