Parameterafhankelijkheid van Oplossingen

2005

Versie 0.979 (september 2025)

Voorwoord

Dit typoscript beschouwt een vergelijking die van een parameter afhangt en die voor elke parameterwaarde een unieke oplossing heeft. Resultaten over de parameterafhankelijkheid van die oplossing worden gepresenteerd. In het bijzonder worden voorwaarden gegeven die continue afhankelijkheid garanderen. Daartoe speelt het verband tussen continuïteit van een afbeelding en de geslotenheid van haar grafiek een cruciale rol.

Het typoscript is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl/manus.html` (indien die url nog geldig is).[1] Een en ander hier is niet zo snel in de literatuur te traceren. Voorkennis, met name van verzamelingstheoretische topologie, is gewenst; in appendices wordt een en ander in herinnering geroepen.

Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij ⓒ gerespecteerd wordt.

Omdat dit typoscript een versienummer < 1 heeft, voelt de auteur zich nog niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden; aan een betere versie wordt gewerkt. De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor het meedenken. Uiteraard juicht de auteur verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen toe.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke domeintekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) publieke domein besturingssysteem Linux.

1 Setting

Soms wil men weten of een oplossing van een vergelijking (of stelsel van vergelijkingen) continu van een parameter afhangt. Dit probleem wordt in dit typoscript onderzocht, en wel voor de volgende setting.

A, P en Y zijn niet-lege topologische ruimten met Y hausdorffs, y_0 is een element van Y en

$$f : A \times P \to Y$$

is een functie met de eigenschap dat er voor elke (parameter) $p \in P$ een unieke $a \in A$ is met

$$f(a, p) = y_0.$$

Deze a noterend met $a_\star(p)$ hebben we een wel-gedefinieerde afbeelding

$$a_\star : P \to A$$

en er geldt

$$f(a_\star(p), p) = y_0 \ (p \in P).$$

In plaats van $f(a, p)$ schrijven we ook wel $f_p(a)$. Op die manier hebben we dan voor elke $p \in P$ een afbeelding $f_p : A \to Y$.

Opmerkingen: 1. De definitie van $a_\star$ heeft nog zin als A, P en Y niet-lege verzamelingen zijn.
2. Men kan de eigenschap van een unieke $a \in A$ loslaten en voor elke $p \in P$ de verzameling $\{a \in A \mid f(a, p) = y_0\}$ definiëren. Dit leidt dan tot een correspondentie $a_\star : P \multimap A$. Een en ander wordt dan wel ingewikkelder.

Als men zich de situatie van de setting voor de geest haalt, dan is het niet uitgesloten dat men in geval van een continue f vermoedt dat ook de functie $a_\star$ continu is. Echter dat hoeft niet zo te zijn. Het volgende voorbeeld geeft een hele klasse van tegenvoorbeelden.

Voorbeeld 1 Laat $A = P = Y = \mathbb{R}$ en fixeer een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die niet continu is en een gesloten grafiek heeft (bijvoorbeeld de functie gedefinieerd door (1) hieronder). Zij Γ de gespiegelde grafiek van g. Ook Γ is gesloten. Omdat $\Gamma \neq \emptyset$, is in $\mathbb{R}^2$ de kortste-afstands-functie tot Γ een wel-gedefinieerde functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: het is de functie die aan $(a, p) \in \mathbb{R}^2$ de (wel-gedefinieerde) kortste afstand tot Γ toevoegt. Het is welbekend dat f continu is en dat de topologische afsluiting van Γ, zijnde weer Γ, de verzameling der nulpunten van f is. Dus $\{(a, p) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, p) = 0\} = \{(g(p), p) \mid p \in \mathbb{R}\}$. Vandaar $a_\star = g$ en dus is $a_\star$ niet continu.

Een fundamentele observatie u is dat de wel-gedefinieerdheid van de afbeelding $a_\star$ impliceert dat $f^{<-1>}(y_0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\}$. We hebben dus dat $f^{<-1>}(y_0)$ de gespiegelde grafiek van $a_\star$ is:

$$f^{<-1>}(y_0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\} = \mathrm{graph}^T(a_\star) \subseteq A \times P.$$

Deze observatie maakt dat we in de volgende paragraaf onderzoeken hoe continuïteit van een afbeelding zich weerspiegelt in haar grafiek.

2 Intermezzo: continuïteit versus gesloten grafiek

Laat X en Y verzamelingen zijn en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan is de grafiek van g de deelverzameling van $X \times Y$ gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}(g) := \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$$

en de gespiegelde grafiek van g de deelverzameling van $Y \times X$ gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}^T(g) := \{(g(x), x) \mid x \in X\}.$$

Als X en Y topologische ruimten zijn, dan heeft het, het cartesische product $X \times Y$ van de producttopologie voorziend, zin te spreken van dingen als dat $\mathrm{graph}(g)$ gesloten (in $X \times Y$) is. Er geldt dan: $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten d.e.s.d.a. $\mathrm{graph}^T(g)$ is gesloten.

Lemma 1 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte, $g : X \to Y$ een afbeelding en B een gesloten deel van Y. Zij K een deelverzameling van Y die $g(X)$ omvat. Dan*

$$g^{<-1>}(B) = P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)),$$

met $P : X \times K \to X$ de projectie op de eerste coördinaat. $\diamond$

Bewijs.— Merk eerst op dat $(X \times B) \cap \mathrm{graph}(g) \subseteq \mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K$.

'$\subseteq$': stel $x \in g^{<-1>}(B)$. Dan $(x, g(x)) \in (X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)$ en $x = P(x, g(x)) \in P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$.

'$\supseteq$': stel $x \in P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$. Laat $(x', b) \in (X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)$ met $x = P(x', b)$. Er volgt $x = x'$ en $g(x') = b$. Dus $x = x' \in g^{<-1>}(B)$. Q.e.d.

Propositie 1 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan:*

1. *g is continu $\Rightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.*
2. *Als Y compact is, dan geldt: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zie ☺ 4, in de appendix.

2. Vanwege deel 1, resteert '$\Leftarrow$' te bewijzen. Stel $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten deel van $X \times Y$. Zij K de topologische afsluiting van $g(X)$ in Y. Dan $g(X) \subseteq K$. K is dus een gesloten deel van de compacte Y en vandaar ook compact. De continuïteit van $g : X \to Y$ bewijzen we door aan te tonen dat voor elk gesloten deel B van Y, $g^{<-1>}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\}$ een gesloten deel van X is. Fixeer nu zo'n B. Met (de notaties) van Lemma 1 geldt $g^{<-1>}(B) = P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$. Omdat K compact is, is (zie eventueel ☺ 5) P gesloten, i.e. elke gesloten deelverzameling van $X \times K$ heeft als beeld onder P een gesloten deel van X. Dus het bewijs is rond als we weten dat $(X \times B) \cap G$ een gesloten deel van $X \times K$ is.

Welnu, $\mathrm{graph}(g)$ is per veronderstelling een gesloten deel van $X \times Y$. Omdat $\mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K$ en $X \times K$ een gesloten deel van $X \times Y$ is, volgt: dat $\mathrm{graph}(g)$ een gesloten deel van $X \times K$ is. Omdat $(X \times B) \cap \mathrm{graph}(g) = (X \times (B \cap K)) \cap \mathrm{graph}(g)$ en ook $X \times (B \cap K)$ een gesloten deel van $X \times K$ is, volgt het gewenste. Q.e.d.

De twee volgende voorbeelden laten zien dat '$\Leftarrow$' in Propositie 1(2) niet hoeft te gelden als Y niet compact is.

Voorbeeld 2 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zij gedefinieerd door

$$g(x) := \begin{cases} e^{1/x} \text{ als } x \neq 0, \\ 0 \text{ als } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dan $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten en g is niet-continu. $\diamond$

Voorbeeld 3 $g : \mathbb{R} \to]0, 1[$ zij gedefinieerd door

$$g(x) := \begin{cases} 1/2 \text{ als } x \leq 0, \\ e^{-x} \text{ als } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Dan $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten (in $\mathbb{R} \times]0, 1[$) en g is niet-continu. $\diamond$

Opmerkingen: 3. Propositie 1(2) volgt ook uit niet zo elementaire resultaten uit de niet-lineaire analyse, en wel uit resultaten voor correspondenties die verbanden behelzen tussen het hemicontinu naar boven zijn en het een gesloten grafiek hebben. Dat is dan best zwaar geschut voor een bewijs omdat de auteur zich hier niet met correspondenties, maar slechts met afbeeldingen, bezig houdt.

4. Propositie 1 gaat dus over het verband tussen continuïteit van een afbeelding en het gesloten zijn van haar grafiek. In de wiskunde is er een stelling met de naam 'Stelling van de gesloten grafiek' die ook over dit verband gaat voor lineaire afbeeldingen, maar echt veel diepzinniger is.[2]

Stelling 1 hieronder is een nuttige generalisatie van Propositie 1(2).

Propositie 2 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte en $g : X \to Y$ een afbeelding waarvoor $g(X)$ bevat is in een compact deel van Y. Dan: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— Propositie 1(1) hebbend moeten we nog '$\Leftarrow$' bewijzen. Stel dus dat $\mathrm{graph}(g)$ gesloten is. Zij K een compact deel van Y dat $g(X)$ bevat. We hebben dus

$$\mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K \subseteq X \times Y.$$

Volgens ☺ 3(2) is $g : X \to Y$ continu dan en slechts dan als haar corestrictie $\tilde{g} : X \to K$ continu is. Volgens Propositie 1(2) zijn we klaar als we laten zijn dat de grafiek $\{(x, \tilde{g}(x)) \mid x \in X\}$ van die corestrictie, hetgeen weer $\mathrm{graph}(g)$ is, een gesloten deel van $X \times K$ is. Welnu, volgens ☺ 1 is dat zo omdat zowel $\mathrm{graph}(g)$ als ook (want K is gesloten in Y) $X \times K$ gesloten in $X \times Y$ zijn. Q.e.d.

Stelling 1 *Zij X een topologische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}^m$ een begrensde afbeelding. Dan: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— $g(X)$ is een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. De afsluiting van die verzameling is een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^n$ en vandaar compact. Omdat die afsluiting $g(X)$ bevat, impliceert Propositie 2 het gewenste. Q.e.d.

3 Continuïteit van oplossingen

Stelling 2 *Stel A is een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ en $f : A \times P \to Y$ is continu.*[3]

1. *Als de functie $a_\star : P \to A$ begrensd is, dan is deze functie continu.*
2. *Als A begrensd is, dan is de functie $a_\star : P \to A$ continu.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel $a_\star : P \to A$ is begrend. Stelling 1 impliceert dat deze afbeelding continu als we laten zien dat $\mathrm{graph}(a_\star)$ gesloten in $P \times A$ is. We bewijzen, hetgeen equivalent is, dat $\mathrm{graph}^T(a_\star)$ gesloten in $A \times P$ is. Welnu, omdat $\mathrm{graph}^T(a_\star) = f^{<-1>}(y_0)$, resteert dus te bewijzen dat $f^{<-1>}(y_0)$ gesloten in $A \times P$ is. En dat laatste is zo omdat $f : A \times P \to Y$ continu en y_0 gesloten is omdat Y hausdorffs is.

2. Dat volgt uit deel 1. Q.e.d.

Propositie 3 *Stel A is een onbegrensd gesloten reëel interval met $A \subseteq \mathbb{R}_+$, $P$is een eigenlijk reëel interval en $f : A \times P \to \mathbb{R}$ is continu. Verder stel dat voor alle $p \in P$ geldt: $f(a,p) > 0$ voor alle $a \in A$ met $a < a_\star(p)$ en $f(a,p) < 0$ voor alle $a \in A$ met $a > a_\star(p)$ (dat is in het bijzonder zo als f dalend in de eerste variabele is). Dan: de functie $a_\star : P \to \mathbb{R}$ is continu.* $\diamond$

[2] Ja, ondanks dat het over lineaire afbeeldingen gaat! Men bedenke dat er zich in oneindig dimensionale lineaire topologische ruimten minder alledaagse problemen kunnen voordoen.

[3] Misschien overbodig op te merken, maar toch: we voorzien $\mathbb{R}^n \times P$ van de producttopologie en vervolgens de deelverzameling $A \times P$ van $\mathbb{R}^n \times P$ van de relatieve topologie.

Bewijs.— Het is voldoende te bewijzen dat de restrictie $a_\star : P' \to \mathbb{R}$ continu is voor elk (niet-leeg) segment P' dat in P bevat is. Stel dat P' zo'n segment is; verder in dit bewijs verwijst $a_\star$ naar die restrictie. We bewijzen dat $a_\star$ begrensd is en zijn dan klaar met Stelling 2.

Laat $p \in P'$. Omdat $f(a_\star(p), p) = 0$ en $f(a, p) < 0$ voor alle $a \in A$ met $a > a_\star(p)$ en A onbegrensd is, kunnen we $a(p) > a_\star(p)$ fixeren zodanig dat $f(a(p), p) < 0$. Omdat f continu in $(a(p), p)$ is, is er een open bol $B_{r(p)}(a(p), p)$ in $A \times P'$ met straal $r(p) > 0$ rond $(a(p), p) \in A \times P'$ waarop f negatief is. Laat $Z = \cup_{p \in P'} B_{r(p)}(a(p), p) \subseteq A \times P'$ en laat, met $B_{r(p)}(p)$ de open bol in P' met straal $r(p)$ rond p, $Z' = \cup_{p \in P'} B_{r(p)}(p) \subseteq P'$. Z' is een open overdekking van de compacte verzameling P'. Dus kunnen we $p = p_1, \dots, p_m \in P'$ zodanig kiezen dat $P' \subseteq \cup_{i=1}^m B_{r(p_i)}(p_i)$. We mogen veronderstellen dat $a(p_1) \geq a(p_k)$ $(1 \leq k \leq m)$. Nu fixeer $p \in P'$. We gaan bewijzen dat $a_\star(p) \leq a(p_1)$ en zijn dan (omdat ook $0 \leq a_\star(p)$) klaar. Neem $k \in \{1, \dots, m\}$ zodanig dat $p \in B_{r(p_k)}(p_k)$. Er volgt $\| \, (a(p_k), p) - (a(p_k), p_k) \, \| = \| \, (0, p - p_k) \, \| = |p - p_k| < r(p_k)$ en vandaar $(a(p_k), p) \in B_{r(p_k)}(a(p_k), p_k)$ en daarom $f(a(p_k), p) < 0$. Omdat $f(\cdot, p)$ strikt dalend is, volgt $a_\star(p) < a(p_k) \leq a(p_1)$. Q.e.d.

In bovenstaande is het domein van f een cartesisch product. Andere settings zijn doe algemener mogelijk. Als voorbeeld bekijken we nu zo'n situatie.

Laat P een eigenlijk reëel interval met $0 \in P \subseteq \mathbb{R}_+$ zijn, $\Delta := \{(a, p) \in \mathbb{R}_+ \times P \mid 0 \leq a \leq p\} \subseteq \mathbb{R}_+ \times P$,

$$f : \Delta \to \mathbb{R}$$

en stel voor elke $p \in P$ is er een unieke $a \in \mathbb{R}_+$ met $(a, p) \in \Delta$ en $f(a, p) = 0$. Deze a noterend met $a_\star(p)$, hebben we een wel-gedefinieerde functie

$$a_\star : P \to \mathbb{R}_+$$

en er geldt

$$f(a_\star(p), p) = 0 \ (p \in P).$$

Een fundamentele observatie is nu weer dat deze wel-gedefinieerdheid

$$f^{<-1>}(0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\} = \mathrm{graph}^T(a_\star) \subseteq \mathbb{R}_+ \times P.$$

impliceert. Alhoewel in het licht van Stelling 2(2) de functie $a_\star$ niet begrensd hoeft te zijn is, geldt:

Propositie 4 *De functie $a_\star : P \to \mathbb{R}_+$ is continu.* $\diamond$

Bewijs.— Omdat P een interval is, is het voldoende te bewijzen dat voor elk segment $P' = [\underline{p}, \overline{p}]$ met $\underline{p} < \overline{p}$ dat in P bevat is de restrictie $a_\star : P' \to \mathbb{R}_+$ van $a_\star$ continu is. Daartoe is het voldoende te laten zien dat de functie $a_\star : P' \to \mathbb{R}$ continu is. Verder in dit bewijs verwijst $a_\star$ naar deze laatste functie.

Fixeer dan nu verder zo'n segment. Merk op dat $a_\star$ begrensd is vanwege $0 \leq a_\star(p) \leq p \leq \overline{p}$ $(p \in P')$. Met Propositie 2 zijn we klaar als we laten zien dat $\mathrm{graph}^T(a_\star)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is.

Laat $\hat{\Delta} = \{(a, p) \in \mathbb{R}_+ \times P' \mid 0 \leq a \leq p\}$ en beschouw de restrictie $\hat{f} : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ van f. Er geldt natuurlijk weer dat $\mathrm{graph}^T(a_\star) = \hat{f}^{<-1>}(0)$. Resteert dus te bewijzen dat $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is. Voor de duidelijkheid:

$$\hat{f}^{<-1>}(0) \subseteq \hat{\Delta} \subseteq \mathbb{R} \times P' \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Omdat $\hat{f} : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ continu is, is $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\hat{\Delta}$. $\hat{\Delta}$ en $\mathbb{R} \times P'$ zijn gesloten in $\mathbb{R}^2$; ☺ 1 impliceert dat $\hat{\Delta}$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$. Tenslotte impliceert ☺ 2 dat $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is. Q.e.d.

4 Differentieerbaarheid van oplossingen

Natuurlijk is de Impliciete-functie-stelling van belang in verband met parameterafhankelijkheid van oplossingen. De klassieke variant van deze stelling (eventueel zie ☺ 6 in Appendix B) maakt differentieerbaarheidsveronderstellingen en doet uitspraken over locale oplossingen. In deze deelparagraaf gebruiken we die stelling om differentieerbaarheid van de functie a_* te onderzoeken.

In de volgende stelling zijn A en P open eigenlijke reële intervallen en $Y = \mathbb{R}$.

Stelling 3 *Stel A en P zijn open eigenlijke reële intervallen en $f : A \times P \to \mathbb{R}$ is k-maal continu differentieerbaar met $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Als $D_1 f(a_\star(p), p) \neq 0$ $(p \in P)$, dan is $a_\star : P \to \mathbb{R}$ een k-maal continu differentieerbare functie.* $\diamond$

Bewijs.— Fixeer $p_0 \in P$. We laten zien, en dan zijn we klaar, dat er een open omgeving V van p_0 in $\mathbb{R}$ met $V \subseteq P$ bestaat zodanig dat de restritie van de functie $a_\star$ tot V k-maal continu differentieerbaar is. Omdat $f(a_\star(p_0), p_0) = 0$ en $D_1 f(a_\star(p_0), p_0) \neq 0$, garandeert de impliciete-functie-stelling de existentie van een open omgeving U van $a_\star(p_0)$ in $\mathbb{R}$ en een open omgeving V van p_0 in $\mathbb{R}$ met $U \times V \subseteq A \times P$ en een unieke functie $\Psi : V \to \mathbb{R}$ met $\Psi(V) \subseteq U$ zodanig dat

$$\{(\Psi(p), p) \mid p \in V\} = \{(a, p) \in U \times V \mid f(a, p) = 0\}.$$

Tevens: Ψ is k-maal continu differentieerbaar.

We bewijzen nu dat $a_\star(p) = \Psi(p)$ $(p \in V)$. Welnu, fixeer $p_1 \in V$. Dan $(\Psi(p_1), p_1) \in \{(a, p) \in U \times V \mid f(a, p) = 0\} \subseteq A \times P$. Dus $f(\Psi(p_1), p_1) = 0$. Omdat $a_\star(p_1)$ de enige $a \in A$ is met $f(a, p_1) = 0$, volgt $\Psi(p_1) = a_\star(p_1)$.

Er volgt: $a_\star : P \to \mathbb{R}$ is k-maal continu differentieerbaar. Q.e.d.

Merk op dat in bovenstaande stelling we uitgingen van een situatie waar er voor elke $p \in P$ een unieke oplossing $a_\star(p)$ is. De Impliciete-functie-stelling wordt dus niet gebruikt voor de existentie van een (locale) oplossing, maar alleen om differentieerbaarheidseienschappen van de functie $a_\star$ te garanderen.

5 Maximalisatieproblemen

De setting in kwestie kan gebruikt worden voor het onderzoek van parameterafhankelijkheid van unieke oplossingen van maximalisatieproblemen (in geval die inwendig zijn), dus van unieke maximaliseerders. De auteur presenteert hier zo'n resultaat; het berust op Stelling 2(2).

Propositie 5 *Gegeven eigenlijke reële intervallen A en P met A compact en een functie $g : A \times P \to \mathbb{R}$. Stel de functie $g_p : A \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar en strikt pseudo-concaaf.*

1. *De functie g_p heeft voor elke $p \in P$ een unieke maximaliseerder $a_\bullet(p)$.*
2. *Beschouw de (dankzij deel 1) wel-gedefinieerde functie $a_\bullet : P \to A$. Stel $D_1 g$ is continu en elke $a_\bullet(p)$ is een inwendig punt van A. Dan is $a_\bullet$ continu.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Omdat g_p continu is, heeft g_p volgens de Stelling van Weierstrass een maximaliseerder. Omdat g_p strikt quasi-concaaf is (eventueel zie ☺ 7(2)), is deze maximaliseerder uniek.

2. Definieer $f : A \times P \to \mathbb{R}$ door $f(a, p) = g_p'(a)$. Dus $f = D_1 g$. f is per veronderstelling continu. Merk op dat A gesloten en begrensd is. Voor alle $p \in P$ geldt volgens de Stelling van Fermat dat $f(a_\bullet(p), p) = g_p'(a_\bullet(p)) = 0$. Verder als $f(a, p) = 0$, dan is $g_p'(a) = 0$ en volgt, omdat g_p pseudo-concaaf is, dat a een maximaliseerder van g_p is en dus, vanwege deel 1, dat $a = a_\bullet(p)$. Conclusie: voor elke $p \in P$ is er een unieke $a \in A$ met $f(a, p) = 0$. We kunnen nu Stelling 2(2) toepassen: merk daartoe op dat $a_\bullet = a_\star$. Q.e.d.

Een vraagje: als een maximalisatieprobleem continu van een parameter afhangt en voor zekere parameterwaarde een unieke maximaliseerder heeft, is er dan dan in de buurt van die parameterwaarde ook een unieke maximaliseerder? Het volgende voorbeeld toont aan dat dat niet hoeft te gelden.

Voorbeeld 4 Stel $G = \{(x_1, x_2) \mid x_2 - 2x_1 + 1 = 0 \vee -x_2 - 2x_1 + 1 = 0\}$ en $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$g(a,p) = g_p(a) := 1 - \mathrm{dist}_G(a,p).$$

Dan: g is continu, g_0 heeft $1/2$ als maximaliseerder en g_p met $0 < p \leq 1$ heeft twee maximaliseerders. $\diamond$

6 Convexe maximumstellingen

Hier bekijken we we enkele zogenaamde convexe maximumstellingen.

In het onderstaande zijn E en F steeds lineaire ruimten over $\mathbb{R}$ en Y een niet-leeg convex deel van F. De elementen van Y noemen we ook wel *parameters*. Verder zijn voor elke parameter y een niet-lege deelverzameling X_y van E en een functie $f_y : X_y \to \mathbb{R}$ gegeven.

We nemen steeds aan dat de functie $f^\star : Y \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f^\star(y) := \max_{x \in X_y} f_y(x)$$

wel-gedefinieerd is.[4] Een voldoende voorwaarde voor het wel-gedefinieerd zijn van deze functie is dat voor elke parameterwaarde y, de functie f_y in precies één punt van X_y een maximum aanneemt, i.e. dat er een unieke maximaliseerder $x^\star(y)$ is. Er geldt dan

$$f^\star(y) := f_y(x^\star(y))$$

en ook de functie $x^\star : Y \to E$ is dan wel-gedefinieerd. (We hebben in dat geval dus een functie $x^\star$ gecreëerd uit de familie van functies $(f_y)_{y \in Y}$.)

Naar bovenstaande situatie verwijzen we ook wel als die van *parameterafhankelijk domein en functievoorschrift*. In geval $X_y = X$ $(y \in Y)$ spreken we ook wel van *parameteronafhankelijk domein en parameterafhankelijk functievoorschrift*. En in geval $f_y := f \upharpoonright X_y$ (i.e. de restrictie van f tot X_y) is, waar $f : A \to \mathbb{R}$ is met A een deel van E dat elke verzameling X_y omvat, spreken we van een *parameterafhankelijk domein en parameteronafhankelijk functievoorschrift*. Een bijzonder geval doet zich hierbij nog voor als X_y zelf gedefinieerd is aan in termen van een functie $g_y : A \to \mathbb{R}$.

Hieronder zullen we naar resultaten die convexiteit (quasi-concaviteit, ...) van $f^\star$ behelzen verwijzen als *convexe maximumstelling* (*quasi-concave maximumstelling*, ...).

Hier is, voor de situatie van parameteronafhankelijk domein en parameterafhankelijk functievoorschrift, een convexe maximumstelling en een quasi-convexe maximumstelling:[5]

Stelling 4 *1. Stel dat voor alle $x \in X$ de functie $f_\cdot(x) : Y \to \mathbb{R}$ convex is. Dan is $f^\star$ convex.*

2. Stel dat voor alle $x \in X$ de functie $f_\cdot(x) : Y \to \mathbb{R}$ quasi-convex is. Dan is $f^\star$ quasi-convex. $\diamond$

Bewijs.— 1. Fixeer parameters y_1, y_2 en laat $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ met som 1 zijn. We moeten laten zien dat voor $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ de ongelijkheid $f^\star(y) \leq \lambda_1 f^\star(y_1) + \lambda_2 f^\star(y_2)$ geldt. Daartoe kiezen we $x_1, x_2, x \in X$ zodanig dat $f^\star(y_1) = f_{y_1}(x_1)$, $f^\star(y_2) = f_{y_2}(x_2)$, $f^\star(y) = f_y(x)$. Er geldt $f_{y_1}(x_1) \geq f_{y_1}(x)$, $f_{y_2}(x_2) \geq f_{y_2}(x)$. Tezamen met de convexiteit der $f_\cdot(a)$ $(a \in X)$ volgt $f^\star(y) = f_y(x) = f_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}(x) \leq \lambda_1 f_{y_1}(x) + \lambda_2 f_{y_2}(x) \leq \lambda_1 f_{y_1}(x_1) + \lambda_2 f_{y_2}(x_2) = \lambda_1 f^\star(y_1) + \lambda_2 f^\star(y_2)$.

2. Fixeer parameters y_1, y_2 en laat $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ met som 1 zijn. We moeten laten zien dat voor $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ de ongelijkheid $f^\star(y) \leq \max(f^\star(y_1), f^\star(y_2))$ geldt. Daartoe kiezen we $x_1, x_2, x \in X$ zodanig dat $f^\star(y_1) = f_{y_1}(x_1)$, $f^\star(y_2) = f_{y_2}(x_2)$, $f^\star(y) = f_y(x)$. Er geldt $f_{y_1}(x_1) \geq f_{y_1}(x)$, $f_{y_2}(x_2) \geq f_{y_2}(x)$. Tezamen met de quasi-convexiteit der $f_\cdot(a)$ $(a \in X)$ volgt $f^\star(y) = f_y(x) = f_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}(x) \leq \max(f_{y_1}(x), f_{y_2}(x)) \leq \max(f_{y_1}(x_1), f_{y_2}(x_1)) = \max(f^\star(y_1), f^\star(y_2))$. Q.E.D.

[4] Eventueel is het mogelijk algemener te werk te gaan door met "sup" i.p.v. "max" te werken.

[5] In het geval van een minimalisatieprobleem waar elke $f_\cdot(x)$ (quasi-)concaaf is, hebben we natuurlijk een *concave minimumstelling*

En hier is een quasi-convexe maximumstelling met parameterafhankelijk domein en parameteronafhankelijk functievoorschrift.

Stelling 5 *Stel*

- $X_y := \{a \in A \mid g_y(a) \leq 0\}$ $(y \in Y)$.
- *voor elke* $a \in A$ *is de functie* $g_.(a) : Y \to \mathbb{R}$ *concaaf.*

Dan

1. $f^\star$ *quasi-convex.*
2. *als* $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *en* h *stijgend in* $\mathbf{y}$ *is, is* $f^\star$ *dalend.* $\diamond$

Bewijs.— Er geldt nu $f^\star(y) = \max_{x \in X_y} f(x)$.

1. Fixeer parameterwaarden y_1 en y_2 en $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ met som 1. Zet $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Neem $x_1 \in X_{y_1}$, $x_2 \in X_{y_2}$ en $x \in X_y$ zodanig dat $f^\star(y_1) = f(x_1)$, $f^\star(y_2) = f(x_2)$, $f^\star(y) = f(x)$. De concaviteit van $g_.(x)$ impliceert dat $0 \geq g_y(x) = g_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}(x) \geq \lambda_1 g_{y_1}(x) + \lambda_2 g_{y_2}(x)$. Daaruit volgt dat tenminste één der getallen $g_{y_1}(x), g_{y_2}(x)$ kleiner dan of gelijk aan nul is. Met i zodanig dat $g_{y_i}(x) \leq 0$ volgt $x \in X_{y_i}$ en daarom $f(x) \leq f^\star(y_i)$. Er volgt tenslotte $f^\star(y) = f(x) = f^\star(y_i) \leq \max(f^\star(y_1), f^\star(y_2))$, zoals gewenst.
2. Neem $\mathbf{y}_2 \geq \mathbf{y}_1$. Dan $g_{\mathbf{y}_2}(a) \geq g_{\mathbf{y}_1}(a)$ $(a \in A)$ en dus $X_{\mathbf{y}_2} \subseteq X_{\mathbf{y}_1}$, waaruit $f^\star(\mathbf{y}_2) \leq f^\star(\mathbf{y}_1)$.

Q.E.D.

Indien we in Stelling 4(1) uitgaan van een concave $f_.(x) : Y \to \mathbb{R}$ (in plaats van een convexe), dan geldt niet noodzakelijk dat $f^\star$ concaaf is. Inderdaad: voor $E = F = \mathbb{R}$, $X_y = \mathbb{R}$ $(y \in F)$ en $f_y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 x$ geldt $f^\star(y) = \frac{1}{2}y^4$. Dus de natuurlijke concave maximumstelling variant van die stelling geldt niet. Maar hier is een concave maximumstelling met parameterafhankelijk domein en parameteronafhankelijk functievoorschrift:

Stelling 6 *Zij voor elke parameterwaarde* y, $g_y : A \to \mathbb{R}$ *een functie. Stel*

- $X_y := \{a \in A \mid g_y(a) \leq 0\}$ $(y \in Y)$ *en de doelfunctie is parameteronafhankelijk;*
- *voor elke* $a \in A$ *is de functie* $g_.(a) : Y \to \mathbb{R}$ *concaaf;*
- f *is concaaf;*
- $\lambda_1 X_{y_1} + \lambda_2 X_{y_2} \subseteq X_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}$ *voor alle* $y_1, y_2 \in Y$ *en* $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ *met som* 1.

Dan is $f^\star$ *concaaf en quasi-convex.* $\diamond$

Bewijs.— De quasi-convexiteit is al in Stelling 6 bewezen.

Er geldt nu $f^\star(y) = \max_{x \in X_y} f(x)$.

Neem $y_1, y_2 \in Y$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ met som 1. Laat $x_1 \in X_{y_1}, x_2 \in X_{y_2}$ zodanig zijn dat $g_{y_1}(x_1) \leq 0$, $f^\star(y_1) = f(x_1)$, $g_{y_2}(x_2) \leq 0$, $f^\star(y_2) = f(x_2)$. Daaruit $\lambda x_1 + \lambda x_2 \in X_{\lambda y_1 + \lambda y_2}$. En daaruit volgt tezamen met de concaviteit van f dat $f^\star(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \lambda_1 f^\star(y_1) + \lambda_2 f^\star(y_2)$, zoals gewenst. Q.E.D.

Opmerking: aan de vierde voorwaarde is voldaan als bijvoorbeeld $g_y(a) = y - g(a)$ en g concaaf is en ook als $g_y(a) = g(a) - y$ en g convex is. Inderdaad in het eerste geval bijvoorbeeld: laat $x_1 \in X_{y_1}, x_2 \in X_{y_2}$ zodanig zijn dat $g(x_1) \geq y_1$, $f^\star(y_1) = f(x_1)$, $g(x_2) \geq y_2$, $f^\star(y_2) = f(x_2)$. Omdat g concaaf is, is $g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) \geq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ en dus $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X_{\lambda y_1 + \lambda y_2}$.

A Potpourri van verzamelingstheoretische topologie

We presenteren hier enkele elementaire resultaten uit de verzamelingstheoretische topologie. Soms geven we een bewijs.

☺ **1** *Stel X is een topologische ruimte, Y een deelruimte van X en $A \subseteq Y$. Dan: A is open (gesloten) in Y dan en slechts dan als er een open (gesloten) deel U van X is met $A = U \cap Y$.*

☺ **2** *Stel X is een topologische ruimte, Y een deelruimte van X en $A \subseteq Y$. Als A gesloten is in Y en Y gesloten is in X, dan is A gesloten in X.*

Bewijs.— We gebruiken ☺ 1. Omdat A gesloten in Y is, is er er een gesloten deel U_1 van X is met $A = U_1 \cap Y$. Dus A is, zijnde een doorsnede van twee gesloten delen van X gesloten in X. Q.e.d.

De restrictie of corestrictie van een continue afbeelding is continu (voor de geïnduceerde topologieën):

☺ **3** *Stel (X,T) en (X',T') zijn topologische ruimten*[6] *en $f : X \to X'$ een afbeelding.*

1. *Stel $X'' \subseteq X$. Met T'' de topologie geïnduceerd door T op X'' geldt: $f : (X,T) \to (X',T')$ is continu $\Rightarrow f : (X'',T'') \to (X',T')$ is continu.*

2. *Stel $f(X) \subseteq X'' \subseteq X'$. Met T'' de topologie geïnduceerd door T' op X'' geldt: $f : (X,T) \to (X',T')$ is continu $\Leftrightarrow f : (X,T) \to (X'',T'')$ is continu.*

☺ **4** *De grafiek van een continue afbeelding $g : X \to Y$, waar X en Y topologische ruimten zijn met Y hausdorffs, is een gesloten deel van $X \times Y$.*

Bewijs.— Hier is een bewijs van deze bewering in het geval X en Y metrische ruimten zijn: zij (x_n, y_n) een rij uit $\mathrm{graph}(g)$ die convergent is, zeg met limiet $(x,y) \in X \times Y$. We moeten laten zien dat $(x,y) \in \mathrm{graph}(g)$. Omdat $(x_n, y_n) \in \mathrm{graph}(g)$ is $y_n = g(x_n)$. Dus de rij $(x_n, g(x_n))$ convergeert naar (x,y). Dit impliceert dat (x_n) naar x convergeert en dat $(g(x_n))$ naar y convergeert. Omdat g continu in x is, convergeert de rij $(g(x_n))$ naar $g(x)$. Dus $g(x) = y$ en daarmee $(x,y) \in \mathrm{graph}(g)$.

En hier voor het algemenere geval: zij Ω het complement van $\mathrm{graph}(g)$ in $X \times Y$. We gaan bewijzen dat Ω open is. Fixeer $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dan $y_0 \neq g(x_0)$. Omdat Y hausdorffs is, bestaan er disjuncte open omgevingen V en W van y_0 respectievelijk $g(x_0)$. Omdat g continu in x_0 is, is er een open omgeving U van x_0 zodanig dat $g(U) \subseteq W$. Als $(u,v) \in U \times V$, dan geldt $g(u) \in W$ en $v \in V$ en dus $g(u) \neq v$, i.e. $(u,v) \notin \mathrm{graph}(g)$. De open omgeving $U \times V$ van (x_0, y_0) ligt daarom in Ω. Dus Ω is open. Q.e.d.

☺ **5** *Laat X en K topologische ruimten zijn met K quasi-compact. Dan is de projectie op de eerste coördinaat $P : X \times K \to X$ gesloten.*

Bewijs.— Hier is een bewijsje waarbij de auteur voor het gemak aanneemt dat X een metrische ruimte is: zij A een gesloten deel van $X \times K$. Aan te tonen is dat $P(A)$ een gesloten deel is van X. Stel (x_n) is een convergente deelrij in $P(A)$. We moeten dus nu aantonen dat de limiet ξ van die rij in $P(A)$ ligt. Kies voor elke x_n een $y_n \in K$ met $(x_n, y_n) \in A$ en $P(x_n, y_n) = x_n$. De y_n liggen in de compacte K, dus is er een deelrij $(y_{p(n)})$ van (y_n) die convergeert, zeg naar η. Nu is $(x_{p(n)}, y_{p(n)})$ een rij in A die convergeert naar (ξ, η). Omdat A gesloten is, ligt (ξ, η) ook in A en dus ligt ξ in $P(A)$, hetgeen te bewijzen was. Q.e.d.

[6] We noteren hier dus expliciet de topologieën.

B Impliciete-functie-stelling

De (klassieke) Impliciete-functie-stelling is een belangrijk resultaat uit de analyse.

☺ **6** *(Impliciete-functie-stelling.) Zij W een open deel van $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ en $f : W \to \mathbb{R}^n$ een k-maal continu differentieerbare functie met $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Stel*

$$(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) \in W,\ f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) = \mathbf{0},\ D_x f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) \textit{ is inverteerbaar.}^7$$

Dan bestaat er een open omgeving U van $\mathbf{x}^{(0)}$ in $\mathbb{R}^n$ en een open omgeving V van $\mathbf{y}^{(0)}$ in $\mathbb{R}^p$ met $U \times V \subseteq W$ en een unieke afbeelding $\Psi : V \to U$ zodanig dat

$$\{(\Psi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in V\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}.$$

Verder als U, V en Ψ dusdanig zijn, dan is de afbeelding $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ k-maal continu differentieerbaar.[8]

Bewijs.— Zie bijvoorbeeld [1]. Q.e.d.

C Pseudo-concaviteit

In deze paragraaf is I een eigenlijk reëel interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Voor bewijzen verwijzen we naar de literatuur.[9]

a. f heet <u>pseudo-concaaf</u> als voor alle $x, y \in I$ met $x \neq y$

$$f(x) < f(y) \ \Rightarrow\ f'(x)(y - x) > 0.$$

b. g heet <u>strikt pseudo-concaaf</u> als voor alle $x, y \in I$ met $x \neq y$

$$f(x) \leq f(y) \ \Rightarrow\ f'(x)(y - x) > 0.$$

☺ **7** *1. f is (strikt) concaaf $\Rightarrow$ f is (strikt) pseudo-concaaf.*

2. f is strikt pseudo-cocaaf $\Rightarrow$ f is strikt quasi-concaaf.

☺ **8** *Stel $f : I \to \mathbb{R}$ is twee keer differentieerbaar. Als voor alle $x \in I$*

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ f''(x) < 0$$

geldt, dan is f strikt pseudo-concaaf.

Referenties

[1] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis I, II.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] M. Truchon. *Théorie de l'Optimisation Statique et Différentiable.* Gaëtan morin, Cicoutimi, 1987. ISBN 2 89105 118 1.

[7] $D_x f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)})$ betreft hier de afgeleide van de functie $f(\cdot, \mathbf{y}^{(0)})$ in $\mathbf{x}^{(0)}$; dat is dus hier een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[8] En nu geldt ook voor elke deelverzameling V' van V dat $\{(\Psi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in V'\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V' \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$.

[9] Deze is vrij schaars wat dat onderwerp betreft. Hier is er een: [2].