De onmogelijkheidsstelling van Arrow

2001

Verbeterde versie 0.937

(december 2024)

Voorwoord

Dit typoscript over de onmogelijkheidsstelling van Arrow is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl` (indien die url nog bestaat).[1] Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij ⓒ gerespecteerd wordt.

Omdat dit typoscript een versienummer < 1 heeft, voelt de auteur zich nog niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden; aan een betere versie wordt misschien nog eens gewerkt.

Voorkennis is nauwelijks vereist. Het belangrijkste is dat men vertrouwd is met de notie van 'relatie'; er is een appendix die die notie behandelt. Onder andere het raadplegen van het typoscript 'Micro-economie voor Bèta's, deel 1' van de auteur kan van voordeel zijn.

Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssyssteem Linux.

1 Inleiding

Dit typoscript behandelt de zogenaamde onmogelijkheidsstelling van Arrow. Kenneth Arrow (1921–2017) was een econoom en wiskundige uit de Verenigde Staten van Amerika. Hij ontving de Nobelprijs voor economie in 1972 samen met Hicks. Tot nu toe ontving nog niemand jonger dan Arrow toen de Nobelprijs voor economie. Voor sommige economen is hij zelfs 'God'. Om maar een paar dingen te noemen: een van zijn meesterwerken is zijn proefschrift getiteld 'Social Choice and Individual Values' Arrow (1951), waarin hij symbolische logica (tralietheorie) gebruikte die toen nog volstrekt onbekend bij economen was. Daarin formuleerde en bewees hij zijn onmogelijkheidsstelling. Samen met Gérard Debreu heeft hij aan mathematisch rigoureuze existentiebewijzen voor algemene evenwichten gewerkt. Hij leverde belangrijke bijdragen aan de convexe analyse. Ook was hij het die de in de economie veel gebruikte ces-functie introduceerde.

De auteur beschouwt de onmogelijkheidsstelling van Arrow als één van de twee 'pareltjes' van de neoklassieke micro-economie. Het andere is de theorie van de comparatieve voordelen. Deze pareltjes lenen zich bij uitstek als een antwoord op de vraag 'Wat kan men nu eigenlijk in de economie?' daarbij wel verwachtend dat men iets met een duidelijke reëlewereldinterpretatie aandraagt. Het model van de volkomen concurrentie bijvoorbeeld, waar een der hoofdresultaten is dat een marktevenwicht (pareto-)efficiënt is vindt de auteur minder in aanmerking komen om naar te refereren omdat het, om maar een paar dingen te noemen, een model is met veel onrealistische reëlewereldveronderstellingen en het reëlewereldgebeuren vooral op de situatie in een evenwicht betrekking heeft.

De onmogelijkheidsstelling van Arrow is een serieus obstakel voor de constructie van een perfect kiessysteem.[2] De komende uiteenzettingen zouden vooral diegenen moeten aanspreken voor wie het buiten kijf staat dat we democratisch moeten zijn, mede omdat het a priori helemaal niet duidelijk is hóé dat dan zou moeten. Maar moge de Onmogelijkheidsstelling van Arrow alstublieft niet tot waarderelativisme voor sociale beslissingen leiden.

In de volgende paragraaf wordt de (mathematische) *setting* gefixeerd. Het kan zijn dat de lezer[3] (even) moet studeren om vertrouwdheid met die notie te krijgen. Vervolgens wordt de reële-wereld-structuur van deze *setting* in Paragraaf 3 besproken. De volgende paragrafen gaan dan over de mise en scène van de onmoglijkheidsstelling van Arrow. Er zijn ook opgaven met oplossingen. De serieuze lezer doet er goed aan deze te bekijken.

2 *Setting*

Fixeer een positief getal $N \geq 2$. In deze paragraaf is er slechts één hoofdobject:

- een afbeelding $P : (\mathrm{Pref}(X))^N \to \mathrm{Rel}(X)$, waar X een niet-lege verzameling is.

Hier duidt $\mathrm{Pref}(X)$ de verzameling der rationele preferentierelaties op X en $\mathrm{Rel}(X)$ de verzameling der relaties op X aan. De elementen van $(\mathrm{Pref}(X))^N$ zijn dus rijtjes $\succsim := (\succsim^1, \dots, \succsim^N)$ ter lengte N van rationele preferentierelaties op X, verder preferentieprofielen te noemen. De elementen van X noemen we ook wel alternatieven. We noteren $\mathcal{N} := \{1, \dots, N\}$ en noemen de elementen van $\mathcal{N}$ ook wel kiezers. Een afbeelding P als boven heet sociale-keuze-regel op X. Een sociale keuzeregel is dus een afbeelding die aan elk preferentieprofiel $\succsim$ een relatie

$$\succsim_s$$

op X toevoegt, verder sociale relatie te noemen.

Gegeven een sociale-keuze-regel P op X en $x, y \in X$, zullen we $x \succsim_s y$ verwoorden met 'x is sociaal tenminste even goed als y'. Gegeven $\succsim_s$, zijn ook de relaties $\precsim_s, \sim_s, \succ_s$ en $\prec_s$ op X

[2] De auteur zal de notie van kiesssysteem hier niet formaliseren; dat zou ook niet meevallen. Voor ons is voldoende: een kiessyssteen bestaat uit regels om de resultaten van een verkiezing te bepalen.

[3] Natuurlijk bedoelt de auteur met woorden als 'lezer' zowel vrouwelijke als mannelijke individuen. Dit woordgebruik is louter gebaseerd op stilistische argumenten en is zeker niet bedoeld om enig onderscheid te accentueren.

gedefinieerd:

$$x \precsim_s y \text{ door } y \succsim_s x;$$
$$x \sim_s y \text{ door } x \succsim_s y \text{ en } y \succsim_s x;$$
$$x \succ_s y \text{ door } x \succsim_s y \text{ en } \neg(y \succsim_s x);$$
$$x \prec_s y \text{ door } y \succ_s x.$$

We hebben nu voor $x \sim_s y$ de verwoording 'x is sociaal even goed als y', voor $x \succ_s y$ de verwoording 'x is sociaal beter dan y' en voor de hand liggende bewoordingen voor de andere relaties.

Voor een verdere reëlewereldinterpretatie van de notie van rationele preferentierelatie verwijzen we naar de economische literatuur. In de volgende deelparagraaf volgt nu verder nog een microscopisering van de reëlewereldinterpretatie van bovenstaande formele *mise-en-scène*.

Met rationele preferentierelaties hebben we ons al in **??** beziggehouden. Aan de hand van een voorbeeld leggen we nu nog een handige notatie voor een rationele preferentierelatie $\succsim$ op een eindige verzameling X uit waarvan we ons vooral in deze paragraaf zullen bedienen. Stel daartoe dat X uit de vier elementen $a_1, \ldots, a_4$ bestaat en beschouw de relatie $\succsim$ gegeven door

$$a_1 \succsim a_1,\ \neg(a_1 \succsim a_2),\ a_1 \succsim a_3,\ a_1 \succsim a_4,\ a_2 \succsim a_1,\ a_2 \succsim a_2,\ a_2 \succsim a_3,\ a_2 \succsim a_4,$$
$$\neg(a_3 \succsim a_1),\ \neg(a_3 \succsim a_2),\ a_3 \succsim a_3,\ \neg\ (a_3 \succsim a_4),\ a_4 \succsim a_1,\ \neg(a_4 \succsim a_2),\ a_4 \succsim a_3,\ a_4 \succsim a_4.$$

Men gaat snel na dat $\succsim$ inderdaad een rationele preferentierelatie is waarvoor $a_2 \succ a_4 \sim a_1 \succ a_3$ geldt. Omdat er slechts één rationele preferentierelatie op X is waarvoor dat geldt, kunnen we haar bondiger noteren met $\succsim\ := a_2(a_4a_1)a_3$. Binnen haakjes staan dus steeds elementen die even goed zijn. We hadden natuurlijk ook kunnen schrijven $\succsim\ := a_2(a_1a_4)a_3$.

3 Gemicroscopiseerde reële-wereld-structuur

Beschouw een eindig aantal N van kiezers, elke kiezer i met zijn eigen persoonlijke voorkeuren over een aantal alternatieven. Duid met X de verzameling der alternatieven aan. We nemen aan dat X niet-leeg is en dat $N \geq 2$ is. Verder nemen we aan dat voor elke kiezer i zijn preferentierelatie een rationele preferentierelatie $\succsim^i$ op X is, *i.e.* een relatie is die vergelijkbaar en transitief is.

Het probleem waar het ons om gaat is om een afbeelding, verder sociale-keuze-regel op X te noemen, te vinden die op redelijke wijze aan alle mogelijke configuraties van individuele rationele preferentierelaties $\succsim^1, \ldots, \succsim^N$ op X, verder preferentieprofiel te noemen, een nieuwe relatie $\succsim_s$ op X toevoegt. De relatie $\succsim_s$ hangt dus van de individuele rationele preferentierelaties af. De beoogde interpretatie van $\succsim_s$ is die van een gezamenlijke waardering van de kiezers voor de alternatieven uit X.[4] Een sociale-keuze-regel formaliseert op die manier kiessystemen. Laten we $x \succsim_s y$ aldus verwoorden: 'x is sociaal tenminste even goed als y'. We noemen de $\succsim_s$ nog sociale relaties. Nu zijn ook de relaties $\precsim, \sim, \succsim, \succ, \prec$ op X gedefinieerd. Merken we nog op dat individuele keuzevrijheid niet beknot wordt omdat $\succsim^i$ iedere in principe mogelijke rationele preferentierelatie van kiezer i mag betreffen.

Het kan geen kwaad bovenstaande verder te microscopiseren. Welnu, allereerst gaan we ervan uit dat de kiezers in kwestie zich überhaupt laten overhalen om te gaan stemmen over de alternatieven. Ook is het idee dat de kiezer altijd gelijk heeft en dat iedereen zich aan de 'spelregels' houdt. Vervolgens kan het stemproces bijvoorbeeld als volgt gerealiseerd worden: elke kiezer gaat naar een stemhokje waar het een briefje[5] krijgt met het verzoek daar zonder pottenkijkers zijn rationele preferentierelatie kenbaar te maken.[6] bepaalt met een sociale-keuze-regel uit alle verstrekte gegevens de sociale rationele preferentierelatie $\succsim_s$. Men verwezenlijkt nu dat alternatief

[4] In die zin draagt een sociale-keuze-regel bij tot het in de greep krijgen van 'sociale welvaart'. Men beseffe ook goed dat het bij dit alles niet gaat over 'goed' en 'kwaad'.

[5] Of pak papier indien nodig.

[6] Misschien doet zo'n kiezer er wel goed aan eerlijke informatie te geven. Ook is het goed op te merken dat elk individu zijn eigen preferentierelatie op X kent, maar niet per se die van de anderen.

Een eerlijke scheidsrechter verzamelt de briefjes en[7] van een of andere commissie om te voorkomen dat deze scheidsrechter zijn functie geen eer zou aandoen.

dat als het beste door die sociale relatie wordt aangewezen of (op de een of andere manier) te kiezen uit de besten als er meerdere beste alternatieven zijn.

Er zijn vele sociale-keuze-regels mogelijk. Maar, zoals al vermeld, zijn we geïnteresseerd in redelijke. Echter over wat 'redelijk' is kunnen de meningen uiteen lopen. Omdat het doel van het hele gebeuren is om de alternatieven sociaal te kunnen vergelijken en de besten daaronder aan te wijzen, bestaat er weinig verschil van mening over de wens dat sociale relaties $\succsim_s$ vergelijkbaar en transitief moeten zijn. Daarom gaan we (straks) in elk geval steeds eisen dat redelijke sociale relaties transitief en vergelijkbaar zijn.[8]

Naast bovenstaand kiessysteem, middels bovenstaande sociale-keuze-regels, zijn er anderen. In dat verband zij bijvoorbeeld opgemerkt dat in de praktijk bij kiessystemen men meestal (in het stemhokje) niet gevraagd wordt de gehele voorkeur kenbaar te maken, maar bijvoorbeeld slechts gevraagd wordt één beste alternatief aan te wijzen. Merken we ook op dat bij bovenstaand kiessysteem de stemming in één keer stemmen plaatsvindt. Het had ook bijvoorbeeld in twee keer gekund. Ook had het indirect gekund: de kiezers kiezen eerst vertegenwoordigers waarmee het stemproces dan vervolgens verder gaat. Bijvoorbeeld: kiezers kiezen een parlement dat vervolgens een premier kiest. Op dergelijke methoden gaan we hier niet in.

Voor het begrip is het goed nu hier al even vooruit te lopen en de onmogelijkheidsstelling van Arrow alvast losjes te formuleren:

> [Onmogelijkheidsstelling van Arrow; populaire versie.] *Er bestaat geen universeel toepasbaar redelijk kiessysteem waarmee een groep van tenminste twee kiezers zich kan uitspreken over een oplossing voor een probleem als er daarvan meer dan twee zijn.*

In het onderstaande zullen we proberen duidelijk te maken in welke zin dit preciezer begrepen dient te worden. Menigeen heeft geprobeerd deze (negatieve) stelling te weerleggen. Zonder succes want de stelling zelf staat omdat ze geformaliseerd en mathematisch rigoureus bewezen kan worden als een paal boven water. Onmogelijkheidsstellingen hebben altijd al tot de verbeelding gesproken.[9] Let op: in concrete gevallen kan het best zo zijn dat een sociale-keuze-probleem tot een goede oplossing te brengen is. Bijvoorbeeld in het geval dat iedereen precies hetzelfde alternatief als beste aanwijst, is het redelijk om dit te verwezenlijken. Maar dat is niet meer dan iets redelijks waar de Onmogelijkheidsstelling van Arrow zelfs vanuit gaat. Maar om een redelijke sociale-keuze-regel te vinden die voor alle mogelijke voorkeuren van de kiezers werkt, dat is (blijkbaar) een echt probleem.

Het artikel van Arrow initieerde een heel nieuw vakgebied met eigen congressen: de sociale-keuze -theorie. Deze (toch wel spectaculaire) stelling werd door Arrow in 1950 bewezen in Arrow (1950) in het kader van zijn dissertatie; ook zie Arrow (1951).[10]

---

[8]Hierboven hebben we in feite al de veronderstelling gemaakt dat het domein van een sociale-keuze-regel op X alle mogelijke configuraties van individuele rationele preferentierelaties $\succsim^1, \ldots, \succsim^N$ op X betreft. Ook over de redelijkheid daarvan zou men kunnen filosoferen.

[9]Het is in dit verband interessant om nog even te wijzen op de volgende twee onmogelijkheidsstellingen uit de wiskunde: de onmogelijkheid van klassieke passer-en-liniaal-problemen zoals de kwadratuur van de cirkel en de Onmogelijkheidsstelling van Gödel.

Kurt Gödel (1906-1978), Oostenrijker, was wellicht de meest briljante logicus ooit. Kreeg als kind vanwege zijn ontembare leergierigheid de bijnaam 'Der Herr Warum'. In zijn dissertatie in 1929 bewees hij zijn volledigheidsstelling, neerkomende op dat een uitspraak die waar is bewijsbaar is. (Preciezer: elke semantisch geldige uitspraak in de eerste orde predicatenlogica is ook bewijsbaar.) In 1931 bewees hij zijn onvolledigheidsstelling, neerkomende op dat substantiële theorieën zoals de rekenkunde van de natuurlijke getallen onvolledig zijn, dat wil zeggen dat daarin een uitspraak A bestaat zodanig dat zowel A als zijn ontkenning $\neg A$ onbewijsbaar zijn. Daarmee was Gödel zijn tijd ver vooruit. Een concreet voorbeeld van zo'n uitspraak wordt verschaft door de Stelling van Paris-Harington in Paris and Harrington (1977).) Het duurde een hele tijd voordat meer mensen inzagen wat voor groots hij voortgebracht had. In de jaren dertig vluchtte Gödel voor de Nazi's uit Oostenrijk weg en reisde, via de Trans-Siberische spoorlijn, naar Princeton. Hij was een fragiel depressief persoon en had voortdurend angst vergiftigd te worden. Zijn vrouw testte het voedsel alvorens hijzelf ervan at. Toen hij stierf woog hij minder dan 40 kilogram.

Nog opmerkenswaardig is het volgende: in 1947 verkreeg Gödel de nationaliteit van de Verenigde Staten van Amerika. Om dat te verkrijgen moest hij bij een rechter komen om aan te tonen dat hij de wet van dat land kende. Bij de voorbereidingen daartoe ontdekete Gödel dat die wet onvolledig was. Twee van zijn vrienden, Albert Einstein en Oskar Morgenstern begeleidden hem bij dit alles. Dankzij hun hulp en een rechtschapen rechter werd vermeden dat Gödel zich bij die ondervraging door zijn antwoorden in moeilijkheden zou brengen.

[10]In feite is deze stelling de bekroning op het werk van de filosoof de Condorcet.

4 Enkele concrete sociale-keuze-regels

Het is een zeer koud kunstje om, gegeven een verzameling van alternatieven X en N kiezers, een sociale-keuze-regel op X te geven. Immers, met $\succsim^i$ de individuele rationele preferentierelaties en met $\succsim_s$ de door de sociale-keuze-regel daaraan toegevoegde relatie op X aanduidend, is bijvoorbeeld: $x \succsim_s y$ gedefinieerd door $x \succsim^1 y \wedge y \succsim^2 x$ een sociale-keuze-regel. Een andere sociale-keuze-regel is dat $x \succsim_s y$ altijd geldt (*i.e.* voor elk paar van alternatieven x, y is x sociaal tenminste even goed als y). Deze sociale-keuze-regels zijn 'gek', laat staan redelijk. Een belangrijk voorbeeld van een meer doordachte en redelijkere sociale-keuze-regel is de volgende Regel van de meerderheid.

Regel van de meerderheid: stel X is een eindige verzameling. $x \succsim_s y$ betekent dat het aantal kiezers i waarvoor $x \succsim^i y$ geldt groter dan of gelijk is aan het aantal kiezers i waarvoor $y \succsim^i x$ geldt. Dus: $x \succsim_s y$ d.e.s.d.a. $\#\{i \mid x \succsim^i y\} \geq \#\{i \mid y \succsim^i x\}$.

Opgave 1 *Bewijs dat voor de Regel van de meerderheid geldt: $x \succ_s y$ d.e.s.d.a. $\#\{i \mid x \succsim^i y\} > \#\{i \mid y \succsim^i x\}$.*

Opgave 2 *Stel dat alle individuen uit een groep van 19 studenten gezamenlijk een keuze willen maken uit de drie namen 'Einstein', 'Impuls' en 'Noorderlicht' voor een nieuw te verschijnen wiskundetijdschrift. Hun rationele preferentierelaties zien er als volgt uit (afkortingen gebruikend voor de alternatieven en de handige notatie uit § 2 gebruikend):*
ein (voor studenten $1, 2, 3, 4$),
eni (voor studenten $17, 18, 19$),
ine (voor studenten $5, 6, 7, 8, 9, 10$),
nei (voor studenten $11, 12$),
nie (voor studenten $13, 14, 15, 16$).
Zij $\succsim_s$ de sociale relatie bepaald door de Regel van de meerderheid.

a. Bepaal $\succsim_s, \succ_s$ en $\sim_s$.

b. Laat zien dat $\succsim_s$ vergelijkbaar en transitief is en bepaal de beste alternatieven.

c. Is $\succsim_s$ antisymmetrisch?

Opgave 3 *Pietje Puk, Kate en Zemfira zitten met een (luxe-)probleem: ze willen samen op vakantie gaan, ofwel naar Duitsland, ofwel naar Canada ofwel naar Rusland. Maar ze kunnen het niet eens worden waarheen te gaan. Op voor de hand liggende manier noteren we de kiezers met V, K, Z en de landen met D, C, R. Met $\succsim^V, \succsim^K, \succsim^Z$ duiden we hun rationele preferentierelaties aan. De individuele rationele preferentierelaties zijn $\succsim^V := DRC$, $\succsim^K := CDR$ en $\succsim^Z := RCD$. Zij $\succsim_s$ de sociale relatie bepaald door de Regel van de meerderheid. Laat zien dat $\succsim_s$ vergelijkbaar maar niet transitief is.*

In het speciale geval van Opgave 2 hebben we in deel b van die opgave gezien dat de Regel van de meerderheid tot een sociale relatie leidt die zelf ook weer een rationele preferentierelatie is n tot één beste alternatief. In de situatie daar zou men zich daarom (in eerste instantie) met de Regel van de meerderheid tevreden kunnen stellen. Maar een der problemen van deze regel is dat ze niet altijd tot een rationele preferentierelatie leidt, zoals in het geval van Opgave 3.[11] Duidelijk zij verder dat de Regel van de meerderheid altijd leidt tot een vergelijkbare sociale relatie.

Het niet transitief zijn van de sociale relatie in Opgave 3 is best verrassend en betreft in feite de <u>klassieke stemparadox</u> van Marie-Jean De Condorcet uit 1785.[12] Omdat men het ontbreken van transitiviteit niet wil, is de Regel van de meerderheid een onredelijke sociale-keuze-regel.

[11] Zie ook Opgave 9.

[12] Marie-Jean de Condorcet (1743-1794), Fransman, filosoof. Zijn familie had na een strenge opvoeding graag een carrière in het leger voor hem gezien, maar hij vond dat filosofie en wiskunde zijn roeping was. Hij was een liberale aristocraat. Met de encyclopedist Jean d'Alembert aan zijn kant verwierf hij grote reputatie, ontwikkelde zich tot intellectueel en werd lid van de Académie Française. Hij werd gearresteerd vanwege zijn politieke opvattingen en stierf twee dagen daarna in de gevangenis.

Natuurlijk zijn er allerlei andere sociale-keuze-regels te bedenken waar alle bijbehorende sociale relaties wel transitief zijn (en we zullen er straks enkele onder de loep nemen). Maar volgens de Onmogelijkheidsstelling van Arrow is echter, zoals we zullen zien, elke sociale-keuze-regel (in het geval er tenminste drie alternatieven zijn) op de een of andere manier onredelijk.

Naast de al genoemde Regel van de meerderheid zijn onder meer de volgende sociale-keuze-regels het vermelden waard:

Regel van de consensus: $x \succsim_s y$ is gedefinieerd door $x \succsim^i y$ voor alle i.

Regel van De Borda:[13] stel X is een eindige verzameling. Elke kiezer i kent aan elk alternatief x een score $b^i(x)$ toe, gelijk aan het aantal alternatieven dat i liever heeft dan x, dus $b^i(x) := \#\{y \in X \mid y \succ^i x\}$.[14] Zij nu $b(x)$ de som van de door de kiezers aan x uitgedeelde waarderingen. Dus $b(x) = \sum_{i=1}^{N} b^i(x)$; $b(x)$ heet de <u>bordatelling</u> van x.[15] Nu is de sociale-keuze-regel P als volgt gedefinieerd: $x \succsim_s y$ door $b(x) \leq b(y)$.

Regel van dictator i: $x \succsim_s y$ door $x \succsim^i y$. (In dat geval zeggen we nog dat i een <u>dictator</u> is.)

Regel van de meeste stemmen: stel X is een eindige verzameling met n alternatieven. Elke kiezer waardeert zijn meest favoriete alternatief, of meest favoriete alternatieven als er meerdere zijn), met 1 en de andere met 0. Zij nu voor elke $x \in X$ het getal $b(x)$ de totale som der waarderingen. Dan: $x \succsim_s y$ betekent $b(x) \geq b(y)$.

Men verwarre de Regel van de meeste stemmen niet met de Regel van de meerderheid.

Opgave 4 *Beschouw weer de situatie uit Opgave 2. Maar nu zij $\succsim_s$ de sociale rationele preferentierelatie bepaald door de Regel van de meeste stemmen.*

a. Bepaal $\succsim_s$.

b. Laat zien dat $\succsim_s$ een rationele preferentierelatie is.

c. Is $\succsim_s$ antisymmetrisch?

d. Is er sociaal een beste alternatief?

Opgave 5 *Bewijs dat voor de Regel van dictator i voor alle alternatieven x, y er geldt: $x \succ_s y \Leftrightarrow x \succ^i y$.*

We introduceren voor een gegeven sociale-keuze-regel nog de volgende terminologie: gegeven een vergelijkbare sociale relatie $\succsim_s$ op X. Dan heet een alternatief c waarvoor $c \succ_s x$ voor alle $x \in X$ met $x \neq c$ <u>condorcetwinnaar</u>. In woorden:

☺ **1** *Gegeven een vergelijkbare sociale relatie is een condorcetwinnaar een alternatief dat bij paarsgewijs sociaal vergelijken elk ander alternatief verslaat.*

Een condorcetwinnaar hoeft niet te bestaan, maar als hij bestaat, dan is hij uniek. Inderdaad: als c_1 en c_2 twee verschillende condorcetwinnaars zouden zijn, dan zou zowel $c_1 \succ_s c_2$ als $c_2 \succ_s c_1$. Dat zou impliceren dat zowel $\neg(c_1 \succsim_s c_2)$ als $\neg(c_2 \succsim_s c_1)$ zouden gelden, hetgeen onmogelijk is omdat $\succsim_s$ vergelijkbaar is.

Opgave 6 *Is er een condorcetwinnaar voor de sociale relatie in Opgave 3? En voor die in Opgave 2?*

---

[13] Jean-Charles de Borda (1733-1799), Fransman, filosoof, wiskundige en marine-officier.

[14] Dus kiezer i geeft aan het element (of aan de elementen) die het het liefst heeft een 0, en aan het element (of aan de elementen) die daarna volgen een 1, et cetera.

[15] Er zijn allerlei varianten van de bordatelling. Zo kan men bijvoorbeeld $b(x)$ nog vervangen door $b(x) - a(x)$, waar $a(x) \in \{0, 3\}$. Op die manier kan men zaken als 'positieve discriminatie' inbouwen. Bijvoorbeeld als de alternatieven mensen voorstellen: $a(x) = 3$ als x een vrouw voorstelt en $a(x) = 0$ anderzijds.

Het moge nu duidelijk zijn dat verschillende sociale-keuze-regels verschillende 'winnaars' kunnen opleveren.[16]

5 Redelijkheidscriteria

We noemen een sociale-keuze-regel redelijk als deze voldoet aan een aantal criteria. We leggen hieronder uit wat deze criteria zijn. Daarbij gebruiken we de volgende terminologie. Gegeven twee relaties R en R' op een verzameling X en $x, y \in X$, zegt men dat R en R' op $\{x, y\}$ overeenstemmen als de implicaties $xRy \Leftrightarrow xR'y$ en $yRx \Leftrightarrow yR'x$ gelden.

Men zegt dat een sociale-keuze-regel voldoet aan:

- het vergelijkbaarheidscriterium, als elke sociale relatie vergelijkbaar is;
- het transitiviteitscriterium, als elke sociale relatie transitief is;
- het paretocriterium,[17] als de sociale-keuze-regel zowel aan het zwakke als het aan zeer zwakke paretocriterium voldoet. Hier: men zegt dat een sociale-keuze-regel voldoet aan
  (a) het zwakke paretocriterium, als voor alle $x, y \in X$ geldt: $x \succ^i y$ voor alle $i \ \Rightarrow\ x \succ_s y$;
  (b) het zeer zwakke paretocriterium, als voor alle $x, y \in X$ geldt: $x \succsim^i y$ voor alle $i \ \Rightarrow\ x \succsim_s y$;
- het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium, als voor alle $x, y \in X$ voor elk tweetal preferentieprofielen die zodanig zijn dat voor elke kiezer zijn rationele preferentierelaties op $\{x, y\}$ overeenstemmen, ook de door de sociale-keuze-regel aan deze preferentieprofielen toegevoegde relaties op $\{x, y\}$ overeenstemmen;
- het afwezigheid-van-dictator-criterium, als geen enkele kiezer i een dictator is.

Naar het vergelijkbaarheids-, transitiviteits-, pareto-, onafhankelijkheid-van-alternatieven- en het afwezigheid-van-dictator criterium tezamen zullen we verwijzen als de redelijkheiscriteria. We merken nog op dat als een sociale-keuze-regel aan het zwakke-pareto-criterium voldoet dit niet automatisch impliceert dat deze ook aan het zeer-zwakke-pareto-criterium voldoet. En ook het omgekeerde is niet waar.

Voorbeeld 1 We hebben al gezien dat de Regel-van-de-meerderheid aan het vergelijkbaarheidscriterium, maar niet aan het transitiviteitscriterium voldoet. (Zie Voorbeeld 1 en Opgave 3.) $\diamond$

Dat een redelijke sociale-keuze-regel aan de redelijkheidscriteria zou moeten voldoen is gevoelsmatig wel duidelijk: voldaan zijn aan het vergelijkbaarheids- en transitiviteitscriterium is te interpreteren als dat men voor de groep der kiezers op dezelfde manier te werk gaat als voor de individuele kiezers, die immers elk een rationele preferentierelatie hebben. Merken we hierbij nog op dat het hebben van een rationele preferentierelatie der kiezers eigenlijk een hypothese is die te verifiëren valt. Maar dat de door een sociale-keuze-regel bepaalde relaties rationele preferentierelaties zijn, is niet iets dat te verifiëren valt, maar is een constructie die gemaakt wordt. Het paretocriterium is ook zeer redelijk in de neoklassieke optiek. En het afwezigheid-van-dictator-criterium staat buiten kijf. Het meest betwistbaar van deze criteria is het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium. In reëlewereldbewoordingen komt dat criterium neer op: 'Bij het sociaal beoordelen van twee alternatieven mogen de andere alternatieven geen rol spelen'. Opgave 7 moge verder verduidelijken wat dit om het lijf heeft.

Het meest ingewikkelde criterium is het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium. Het kan geen kwaad om een 'receptje' te geven hoe dat te controleren. Alvorens dat te formuleren, even een opmerking over notaties: we werkten met de notaties $\succsim, \succ, \sim$ (al dan niet nog van een

[16]Vandaar onder meer dat het voor politici nuttig kan zijn om een wiskundige in hun campagneploeg te hebben (die zich ertoe lenen om die politici van dienst te zijn).

[17]Men verwarre de paretocriteria niet met de noties van pareto-effici'entie.

subschrift s voorzien). Let erop hoe de combinatie van de laatste twee symbolen het eerste geeft. Als er nu nog andere relaties tegelijkertijd in het geding zijn, dan kunnen we deze bijvoorbeeld noteren met $\trianglerighteq, \triangleright, -$ (al dan niet voorzien van een subschrift). Hier is het beloofde receptje:

> Fixeer alternatieven x, y en preferentieprofielen $\succsim, \trianglerighteq$ zodanig dat voor alle j geldt $x \succsim^j y \Leftrightarrow x \trianglerighteq^j y$ en $y \succsim^j x \Leftrightarrow y \trianglerighteq^j x$. Controleer nu of ook $x \succsim_s y \Leftrightarrow x \trianglerighteq_s y$ en $y \succsim_s x \Leftrightarrow y \trianglerighteq_s x$ gelden.

Voorbeeld 2 De Regel van de consensus voldoet aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven criterium. Inderdaad, fixeer alternatieven x, y en preferentieprofielen $\succsim, \trianglerighteq$ zodanig dat voor alle j geldt $x \succsim^j y \Leftrightarrow x \trianglerighteq^j y$ en $y \succsim^j x \Leftrightarrow y \trianglerighteq^j x$.

Nu $x \succsim_s y \ \Leftrightarrow x \succsim^i y$ voor alle $i \ \Leftrightarrow \ x \trianglerighteq^i y$ voor alle $i \ \Leftrightarrow \ x \trianglerighteq_s y$. En net zo $y \succsim_s x \Leftrightarrow y \trianglerighteq_s x$. $\diamond$

Opgave 7 *Als reëlewereldvoorbeeld bekijken we twee hackers, te weten Pietje Puk en Mathijs Reuters die willen uitmaken welk van de nieuwste versie der spelletjes Doom (D), Tomb Raider (T) en Sim City (S) ze gezamenlijk gaan hacken. Pietje Puk hackt het liefst T, vervolgens D en het minst graag S. Mathijs Reuters hackt het liefst S, vervolgens T en het minst graag D.*

a. Wat is de bordatelling voor T, wat voor D en wat voor S?

b. In een computerspelletjestijdschrift lezen Pietje Puk en Mathijs Reuters het bericht dat Lara Croft best wel van een biefstukje houdt. Pietje Puk en Mathijs Reuters, respectievelijk veganist en vegetariër zijnde, vinden dat maar niets en laten T daarom een plaatsje zakken. De nieuwe voorkeur van Pietje Puk is DTS en die van Mathijs Reuters is SDT. Bepaal voor deze gewijzigde voorkeuren de bordatelling.

c. Leg aan de hand van a en b uit dat de Regel van De Borda niet aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium voldoet en wat daaraan dan wel niet zo redelijk is.

Opgave 8 *Laat zien dat ook de Regel van de meeste stemmen niet aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven- criterium voldoet.*

Laten we nu bovenstaande concrete sociale-keuze-regels confronteren met de vijf redelijkheids-criteria.

Opgave 9 *Laat ook abstract zien (i.e. niet aan de hand van een speciaal voorbeeld) dat de Regel van de meerderheid in geval $\#X \geq 3$ niet aan het transititveitscriterium voldoet. Laat ook zien dat deze regel aan het pareto-criterium, aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven- en aan het afwezigheid-van-dictator-criterium voldoet.*

Opgave 10 *Laat zien dat in geval X slechts twee elementen bevat, de regel van de meerderheid voldoet aan alle vijf criteria.*

Een veel diepere analyse kan voor het geval $\#X = 2$ gegeven worden. Wij zullen dat hier niet doen. (De ge´ınteresseerde lezer raadplege bijvoorbeeld het boek Mas-Colell et al. (1995).)

Het moge duidelijk zijn dat de Regel van de consensus niet aan het vergelijkbaarheidscriterium voldoet, maar wel aan het transitiviteits- en aan het afwezigheid-van-dictator-criterium voldoet. En in Voorbeeld 2 hebben we gezien dat deze regel aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium voldoet.

Opgave 11 *Bewijs dat de Regel van de consensus aan het paretocriterium voldoet.*

Wat de Regel van De Borda betreft hebben we al in Opgave 7 aan een concreet voorbeeld gezien dat deze niet aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium voldoet.

Opgave 12 *Laat zien dat de Regel van de Borda wel aan de andere vier criteria voldoet.*

De volgende tabel vat bovenstaande samen en vult het aan; bewijzen daarvan zijn recht-toe-recht-aan. De tabel geeft een overzicht van aan welke der vijf criteria (V, T, P, O, A) aangeduid met de Regel van de meerderheid P_M, de Regel van de consensus P_C, de Regel van De Borda P_B, de Regel van dictator i P_i en de Regel van de meeste stemmen P_S voldoen; een '+' duidt aan dat de regel voldoet en een '-' dat deze niet voldoet. In de tabel is voor het gemak verondersteld dat $\#X \geq 3$.

	V	T	P	O	A
P_M	+	-	+	+	+
P_C	-	+	+	+	+
P_B	+	+	+	-	+
P_i	+	+	+	+	-
P_S	+	+	+	-	+

We merken nog op dat bij elk der vijf sociale-keuze-regels in bovenstaande tabel aan het paretocriterium is voldaan.

6 De Onmogelijkheidsstelling van Arrow

Hier is de stelling waar het ons om te doen was:

Stelling 1 *[Onmogelijkheidsstelling van Arrow; formele versie.] Zij X een verzameling met tenminste drie elementen. Er is geen sociale-keuze-regel op X die voldoet aan elk der volgende vijf criteria:*
het vergelijkbaarheidscriterium;
het transitiviteitscriterium;
het paretocriterium;
het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium;
het afwezigheid-van-dictator-criterium. $\diamond$

Het simultaan eisen van de in de Onmogelijkheidsstelling van Arrow genoemde vijf criteria is blijkbaar logisch incompatibel. We merken nog op dat Stelling 1 niet de enige vorm van de Onmogelijkheidsstelling van Arrow is: in de literatuur komt men van Stelling 1 allerlei varianten tegen. Stelling 1 is een direct gevolg van de volgende variant van die stelling:

Stelling 2 (Mogelijkheidsstelling van Arrow.) *Zij X een verzameling met tenminste drie elementen. De enige sociale-keuze-regels voor tenminste twee kiezers op X die voldoen aan elk der volgende vier criteria:*
het vergelijkbaarheidscriterium,
het transitiviteitscriterium,
het paretocriterium,
het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium,
zijn de dictatorregels. $\diamond$

Bewijs.— Het bewijs maakt gebruik van de volgende notie: zij P een sociale-keuze-regel op X en A een coalitie, *i.e.* een (eventueel lege) deelverzameling van $\mathcal{N}$. Met $x, y \in A$ heet een coalitie A <u>P-beslissend voor x tegen y</u> indien voor elk preferentieprofiel $\succsim$ geldt:

$$x \succsim^i y \ (i \in A) \text{ en } y \succsim^i x \ (i \notin A) \quad \Rightarrow \quad x \succsim_s y.$$

En A heet <u>P-beslissend</u> indien A voor elk paar van alternatieven $x, y \in X$, P-beslissend voor x tegen y is.

Stap 1. Stel P is een sociale-keuze-regel die aan de vier genoemde criteria voldoet. Dan bestaan er twee verschillende alternatieven x en y en een coalitie D met $\#D = 1$, zodanig dat D P-beslissend voor x tegen y is.[18]

Bewijs van Stap 1. Zij $\mathcal{D}$ de verzameling der coalities die P-beslissend voor een welgekozen verschillend tweetal van alternatieven zijn. Vanwege het zeer zwakke paretocriterium is $\mathcal{N} \in \mathcal{D}$. Vanwege het zwakke paretocriterium is $\emptyset \notin \mathcal{D}$. (Immers als $\emptyset \in \mathcal{D}$ is, dan zijn er twee verschillende alternatieven x, y zodanig dat $\emptyset$ P-beslissend voor x tegen y is. Kies nu een preferentieprofiel $\succsim$ zodanig dat $y \succ^i x$ $(i \in \mathcal{N})$. Dan is zowel $x \succsim_s y$ omdat $\emptyset$ P-beslissend voor x tegen y is als $y \succ_s x$ vanwege het zwakke paretocriterium zijn, hetgeen absurd is.)

Zij nu $D \in \mathcal{D}$ een coalitie met de eigenschap dat ze een minimaal aantal elementen bevat. We hebben dus $\#D \geq 1$. Indien $\#D = 1$, zijn we klaar. Stel nu dat $\#D \geq 2$ zou zijn. Laat nu x, y twee verschillende alternatieven zijn zodanig dat D P-beslissend voor x tegen y is. Omdat $\#D \geq 2$ is ze te ontbinden in een singleton[19] en diens rest: $D = \{d\} \cup C$ met $d \notin C$. Omdat X tenminste drie elementen heeft, kunnen we een alternatief z verschillend van x en y kiezen. Beschouw nu een preferentieprofiel $\succsim$ dat voldoet aan

$$x \succsim^d y \succsim^d z, \quad z \succsim^i x \succsim^i y \ (i \in C), \quad y \succsim^j z \succsim^j x \ (j \notin D).$$

Omdat D P-beslissend voor x tegen y is, volgt

$$x \succsim_s y.$$

Er geldt nu verder $\neg\ (z \succsim_s y)$. Inderdaad: $z \succsim_s y$, het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium gebruikend dat zegt dat dit resultaat slechts van de individuele relaties tussen z en y afhangt, betekent dat de coalitie C P-beslissend voor z tegen y is[20] en dan zou $C \in \mathcal{D}$ zijn, hetgeen uitgesloten is omdat C minder elementen dan D bevat. Omdat $\succsim_s$ vergelijkbaar is, volgt dus

$$y \succsim_s z.$$

Transitiviteit van $\succsim_s$ geeft

$$x \succsim_s z.$$

Dit impliceert, weer het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium gebruikend volgt dat de coalitie $\{d\}$ P-beslissend voor x tegen z is, hetgeen absurd is vanwege de veronderstelling dat $\#D \geq 2$.

Stap 2. Stel P is een sociale-keuze-regel die aan de vier genoemde criteria voldoet. Dan bestaat er een kiezer d zodanig dat $\{d\}$ P-beslissend is.

Bewijs van Stap 2. We nemen twee verschillende alternatieven x, y en een coalitie D bestaande uit een element d als in Stap 1 en laten zien dat d als gezocht is. D is dus P-beslissend voor x tegen y. Zij a een willekeurig alternatief en beschouw een preferentieprofiel $\succsim$ waar

$$x \succsim^d y \succsim^d a, \ \ y \succsim^i a \succsim^i x \ (i \neq d).$$

Er geldt $x \succsim_s y$ omdat D P-beslissend voor x tegen y is en er geldt $y \succsim_s a$ vanwege het zeer zwakke paretocriterium. De transitiviteit van $\succsim_s$ impliceert

$$x \succsim_s a.$$

[18] Dat x en y verschillend zijn is hier wezenlijk, want voor elke sociale-keuze-regel P die aan het vergelijkbaarheidscriterium voldoet, elke coalitie A en elk alternatief x geldt altijd: A is P-beslissend voor x tegen x.

[19] *I.e.* een verzameling die slechts één element bevat.

[20] Het kan geen kwaad dat even precies op te schrijven. Stel $z \succsim_s y$. Om te laten zien dat de coalitie C P-beslissend voor z tegen y is, nemen we een preferentieprofiel $\trianglerighteq$ zodanig dat $z \trianglerighteq^i y$ $(i \in C)$ en $y \trianglerighteq^i z$ $(i \notin C)$. Merk nu op dat de rationele preferentierelaties $\succsim$ en $\trianglerighteq$ op $\{z, y\}$ overeenstemmen. Vanwege het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium en $z \succsim_s y$ geldt nu ook $z \trianglerighteq_s y$, zoals gewenst.

Met behulp van het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium kunnen we nu concluderen: voor elk preferentieprofiel $\precsim$ en alternatief a geldt

$$x \succsim^d a \text{ en } a \succsim^i x \ (i \neq d) \quad \Rightarrow \quad x \succsim_s a.$$

Dit betekent precies dat D P-beslissend voor x tegen a is. Neem nu twee willekeurige alternatieven z en w en beschouwen we een preferentieprofiel $\succsim$ waar

$$w \succsim^d x \succsim^d z, \quad z \succsim^i w \succsim^i x \ (i \neq d).$$

Er geldt $w \succsim_s x$ vanwege het zeer zwakke paretocriterium en $x \succsim_s z$ omdat, zoals we zojuist gezien hebben, D P-beslissend voor x tegen z is. Daaruit volgt $w \succsim_s z$. Weer met behulp van het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterion volgt nu dat D P-beslissend voor w tegen z is.

Stap 3. Stel P is een sociale-keuze-regel die aan de vier genoemde criteria voldoet. Dan bestaat er een kiezer $d \in \mathcal{N}$ zodanig dat d een dictator is.

Bewijs van Stap 3. Volgens Stap 2 bestaat er een alternatief $d \in \mathcal{N}$ zodanig dat $D := \{d\}$ P-beslissend is.[21] Laat nu x, y, z alternatieven zijn en beschouw een preferentieprofiel $\succsim$ waar

$$x \succsim^d z \succsim^d y, \ z \succsim^i x \ (i \neq d), \ z \succsim^i y \ (i \neq d).$$

Dan is $x \succsim_s z$, omdat D P-beslissend is en $z \succsim_s y$ vanwege het zeer zwakke paretocriterium. Transitiviteit van $\succsim_s$ geeft $x \succsim_s y$. Vanwege het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium hebben we nu bewezen dat:

$$x \succsim^d y \ \Rightarrow x \succsim_s y.$$

De rollen van x en y verwisselend hebben we ook

$$y \succsim^d x \ \Rightarrow y \succsim_s x.$$

Net zo bewijzen we (startende met $x \succsim^d z \succ^d y, \ z \succsim^i x, \ (i \neq d), \ z \succ^i y \ (i \neq d)$)

$$x \succ^d y \ \Rightarrow x \succ_s y,$$

$$y \succ^d x \ \Rightarrow y \succ_s x.$$

Daaruit halen we

$$x \succsim^d y \ \Leftrightarrow x \succsim_s y.$$

Dus d is een dictator. Q.e.d.

Opgave 13 *Ga na aan welke der criteria uit Stelling 1 de volgende sociale-keuze-regel op X voldoet. $x \succsim_s y$ betekent* $1 = 1$.[22]

7 Verdere redelijkheidscriteria

Men zou zich nog kunnen afvragen of er nog andere redelijke eisen voor een sociale-keuze-regel zijn. Het antwoord luidt: 'Zeer zeker, bijvoorbeeld het monotoniciteitscriterium'.

Men zegt dat een sociale-keuze-regel voldoet aan

– het monotoniciteitscriterium als voor elk preferentieprofiel $\succsim$ en alternatieven x, y met $x \succ_s y$ het volgende geldt: voor elk preferentieprofiel $\trianglerighteq$ dat voor elke i voldoet aan $x \succsim^i y \ \Rightarrow x \trianglerighteq^i y$ en aan $x \succ^i y \ \Rightarrow x \triangleright^i x$, geldt $x \triangleright_s y$.

[21] Merk op dat dit hebbende ons nog niet in staat stelt te concluderen dat d een dictator is. Daartoe moet nog wat werk verzet worden.

[22] Dus $x \succsim_s y$ geldt voor alle x en y.

Opgave 14 *Probeer het monotoniciteitscriterium te verwoorden.*

Opgave 15 *Voldoet de Regel van De Borda aan het monotoniciteitscriterium?*

Ook zou het redelijk zijn dat een sociale-keuze-regel geen onderscheid maakt tussen de kiezers: het maakt alleen uit dàt er een bepaalde individuele voorkeur wordt opgegeven, maar het maakt niet uit wèlke kiezer dat doet. (Merk op dat bij Opgave 2 bijvoorbeeld het er niet toe doet welke der studenten welke voorkeur hebben.) Evenzo zou het redelijk zijn dat alternatieven gelijkwaardig behandeld worden. We zullen deze twee eigenschappen hier niet formaliseren.

De Onmogelijkheidsstelling van Arrow is een negatief resultaat over sociale-keuze-regels. Er is echter nog meer negatiefs te melden: het kan zich lonen om de eigen voorkeuren anders te doen lijken dan ze zijn.[23] Vermelden we in dit verband nu twee soorten van strategisch gedrag. 1) Een kiezer met als eerste voorkeur een kansloos alternatief zou kunnen besluiten om van zijn echte eerstvolgende kanshebbende voorkeur zijn eerste voorkeur te maken. 2) Een kiezer kan besluiten om een rivaliserend alternatief dat in zijn echte voorkeur op de tweede plaats staat naar de laatste plaats te verschuiven om zo ervoor te zorgen dat zijn eerste voorkeur meer kans maakt ten opzichte van het rivaliserende alternatief. Natuurlijk hangt van de sociale-keuze-regel in kwestie af hoe een en ander hier uitpakt. Beschouwen we als voorbeeld eens de Regel van De Borda in geval van twee kiezers en vier alternatieven w, x, y, z. De voorkeuren zijn $w \succ^1 x \succ^1 y \succ^1 z$ en $x \succ^2 y \succ^2 w \succ^2 z$. De bordatellingen zijn dan $b(w) = 2, b(x) = 1, b(y) = 3, b(z) = 6$. Dus x zal gekozen worden. Kiezer 2 is blij daarmee, maar kiezer 1 had liever w gehad. Kiezer 1 kent de voorkeuren van keizer 2, rekent wat, en komt tot de conclusie dat het voor hem gunstig is zijn voorkeuren als volgt te misrepresenteren: $w \succ^1 z \succ^1 y \succ^1 x$. De nieuwe bordatellingen zijn dan $b(w) = 2, b(x) = 3, b(y) = 3, b(z) = 4$ en w zou gekozen worden.

We hebben hier dus een andere tekortkoming van de Regel van De Borda geconstateerd. In feite zou men hier een criterium van kunnen maken: het <u>niet-manipuleerbaarheidscriterium</u>. Er is een hele theorie rondom dit criterium en natuurlijk een stelling: de <u>Onmogelijkheidsstelling van Gibbard-Satterthwaite</u>. We gaan hier niet verder op in en verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de literatuur.[24]

Tenslotte: het meest eerlijke kiessysteem is misschien wel dat waar (om de beurt) één subject door een eerlijke loterij gelozen wordt om de sociale preferentierelatie te bepalen. Maar in het hedendaagse politieke klimaat zal zoiets niet verwezenlijkt worden.

8 Antwoorden

<u>Oplossing 1</u> $x \succ_s y$ d.e.s.d.a. $x \succsim_s y$ en $\neg(y \succsim_s x)$ d.e.s.d.a. $\#\{i \mid x \succsim^i y\} \geq \#\{i \mid y \succsim^i x\}$ en $\neg(\#\{i \mid y \succsim^i x\} \geq \#\{i \mid x \succsim^i y\})$ d.e.s.d.a. $\#\{i \mid x \succsim^i y\} > \#\{i \mid y \succsim^i x\}$.

<u>Oplossing 2</u> a. $i \succsim_s i$, $e \succsim_s e$, $n \succsim n, i \succ_s e$, $i \succ_s n$, $n \succ_s e, i \sim_s i$, $e \sim_s e$, $n \sim_s n$.
b. Ja (vanwege a). Impuls, i.e. i, is het beste alternatief.
c. Ja: vanwege a geldt voor elk tweetal elementen x, y met $x \succsim_s y$ en $y \succsim_s x$ dat $x = y$).

<u>Oplossing 3</u> $\succsim_s$ is vergelijkbaar: als x en y alternatieven zijn, dan geldt steeds dat $\#\{i \mid x \succsim^i y\} \geq \#\{i \mid y \succsim^i x\}$ (en dan $x \succsim_s y$) of $\#\{i \mid x \succsim^i y\} < \#\{i \mid y \succsim^i x\}$ (en dan $y \succsim_s x$).
$\succsim_s$ is niet transitief: er geldt dat $D \succsim_s R, R \succsim_s C, C \succsim_s D$.

<u>Oplossing 4</u> a. $i \succsim_s i$, $e \succsim_s e$, $n \succsim_s n, e \succsim_s i$, $e \succsim_s n, i \succsim_s n$, $n \succsim_s i$.
b. Dat volgt uit inspectie van a.
c. Nee (vanwege $i \sim_s n$).
d. Ja, Einstein (vanwege a).

<u>Oplossing 5</u> $x \succ_s y$ d.e.s.d.a. $x \succsim_s y$ en $\neg(y \succ_s x)$ d.e.s.d.a. $x \succsim^i y$ en $\neg(y \succsim^i x)$ d.e.s.d.a. $x \succ^i y$.

[23]In feite is dat in de reële wereld om ons heen schering en inslag: veel mensen om je heen, vooral volwassenen, met een 'masker' ter maximalisatie van hun eigen 'nutje'.

[24]Bijvoorbeeld naar het boek Storcken and de Swart (1992).

Oplossing 6 Nee; ja, impuls.

Oplossing 7 a. $b(T) = 2, b(D) = 4, b(S) = 3$.
b. $b(T) = 4, b(D) = 2, b(S) = 3$.
c. De oude voorkeuren van beide kiezers stemmen op $\{D, S\}$ overeen. De nieuwe doen dat ook. Maar $\succsim$ stemt niet op $\{D, S\}$ overeen, want $D \succsim S$ terwijl $D \succsim' S$ niet geldt. Niet zo redelijk hier is dat de voorkeuren van Pietje Puk en Reuters met betrekking tot D en S niet veranderd zijn, terwijl de bordatelling wel tot verschillende voorkeuren komt.

Oplossing 8 Stel $X = \{A, K, R\}_{\neq}$ en $N = 3$. Verder laat $\succsim_1 = RKA$, $\succsim_2 = AKR, \succsim_3 = RAK$. En $\trianglerighteq_1 = RAK$, $\trianglerighteq_2 = KAR, \trianglerighteq_3 = ARK$. Dit impliceert $R \succsim_1 K$, $K \succsim_2 R, R \succsim_3 K$ en $R \succ_s K$. En $R \trianglerighteq_1 K$, $K \trianglerighteq_2 R, R \trianglerighteq_3 K$, maar $R -_s K$.

Oplossing 9 Niet voldaan zijn aan het transitiviteitscriterium: daartoe fixeren we drie verschillende alternatieven x_1, x_2, x_3. Laat de individuele rationele preferentierelaties $\succsim^1, \succsim^2$ voor de kiezers 1 en 2 als volgt gedefinieerd zijn:

$\succsim^1$ beekent $x_1 x_2 (x_3 a)$ voor alle $a \notin \{x_1, x_2, x_3\}$. (Dus x_1 is beter dan x_2, x_2 is beter dan x_3 en elke a ongelijk aan x_1, x_2, x_3 is even goed als x_3.)

En $\succsim^2$: $(a x_2 x_3) x_1$ voor alle $a \notin \{x_1, x_2, x_3\}$. Verder laat alle andere kiezers onverschillig zijn tussen alle alternatieven. Dan geldt $x_1 \sim_s x_2$, $x_2 \succ_s x_3$, $x_1 \sim_s x_3$. Dus ook $x_3 \succsim_s x_1$, $x_1 \succsim_s x_2$ en $\neg(x_3 \succsim_s x_2)$. Dus $\succsim_s$ is niet transitief.

Voldaan zijn aan het zwakke paretocriterium: stel $x \succ^i y$ voor alle i. Dan $x \succsim^i y$ voor alle i en geldt voor geen enkele i dat $y \succsim^i x$. Dat impliceert $\{i \mid x \succsim^i y\} = N > 0 = \{i \mid y \succsim^i x\}$. Daaruit $x \succsim_s y$ en $\neg(y \succsim_s x)$. Dus $x \succ_s y$.

Voldaan zijn aan het paretocriterium: stel $x \succsim^i y$ voor alle i. Dan $x \succsim^i y$ voor alle i. Dat impliceert $\{i \mid x \succsim^i y\} = N \geq \{i \mid y \succsim^i x\}$. Daaruit $x \succsim_s y$.

Voldaan zijn aan het onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium: fixeer alternatieven x, y en preferentieprofielen $\succsim, \trianglerighteq$ zodanig dat voor alle j geldt $x \succsim^j y \Leftrightarrow x \trianglerighteq^j y$ en $\succsim^j x \Leftrightarrow y \trianglerighteq^j x$. Er geldt nu $x \succsim_s y \Leftrightarrow \{j \mid x \succsim^j y\} \geq \{j \mid y \succsim^j x\} \Leftrightarrow \{j \mid x \trianglerighteq^j y\} \geq \{j \mid y \trianglerighteq^j x\} \Leftrightarrow x \trianglerighteq_s y$ en net zo $y \succsim_s x \Leftrightarrow y \trianglerighteq_s x$, zoals gewenst.

Voldaan zijn afwezigheid-van-dictator-criterium: om te laten zien dat de Regel van de meerderheid voor geen enkele i gelijk aan de Regel van disctator i is, nemen we twee verschillende alternatieven x, y en een preferentieprofiel $\succsim$ waarvoor

$$x \sim^i y,\ y \succsim^j x,\ (j \neq i).$$

Dan geldt $\#\{j \mid x \succsim^i y\} = 1 < N = \#\{j \mid y \succsim^i x\}$ en dus $\neg(x \succsim_s y)$. We hebben nu: $x \succsim^i y$ terwijl $x \succsim_s$ niet geldt; dus kiezer i is geen dictator.

Oplossing 10 We bewijzen slechts dat voldaan is aan het transitiviteitscriterium (en laten de overige bewijzen aan de lezer over, zie ook Opgave 9). Daartoe stel x, y, z zijn alternatieven zodanig dat $x \succsim_s y$ en $y \succsim_s z$ geldt. Omdat $\#X = 2$ geldt $x = y = z$ of $z = x \neq y$ of $x = y \neq z$ of $x \neq y = z$. Voor het eerste, derde en het vierde geval is het triviaal dat $x \succsim_s z$ geldt. En voor het tweede geval geldt $x \succsim_s z$ omdat de Regel van de meerderheid aan het reflexiviteitscriterium voldoet.

Oplossing 11 Zeer zwakke paretocriterium: fixeer twee alternatieven x, y met $x \succsim^i y$ voor alle i. Dan $x \succsim_s y$, zoals gewenst.

Zwakke paretocriterium: fixeer twee alternatieven x, y met $x \succ^i y$ voor alle i. Dan ook $x \succsim^i y$ voor alle i en dus $x \succsim_s y$. Verder geldt voor geen enkele i dat $y \succsim^i x$, dus $\neg(x \succsim_s y)$ geldt. We concluderen dat $x \succ_s y$ geldt, zoals gewenst.

Oplossing 12 Transitiviteitscriterium: stel $x \succsim_s y$ en $y \succsim_s z$. Er geldt nu $b(x) \leq b(y)$ en $b(y) \leq b(z)$. Er volgt $b(x) \leq b(z)$ en dus $x \succsim_s z$.

Vergelijkbaargheidscriterium: er geldt $b(x) \leq b(y)$ of $b(x) \geq b(y)$, dus respectievelijk $x \succsim_s y$ of $y \succsim_s x$.

Afwezigheid-van-dictator-criterium: we laten zien dat kiezer i geen dictator is. Neem daartoe twee verschillende elementen x, y en een preferentieprofiel $\succsim$ zodanig dat $x \sim^i y$ en $y \succ^j x$ voor alle $j \neq i$. Dan $b^i(x) = b^i(y)$ en $b^j(y) < b^j(x)$ $(j \neq i)$, waaruit $b(x) > b(y)$ en dus niet $x \succsim_s y$ geldt terwijl wel $x \succsim^i y$ geldt.

Paretocriterium: als $y \succsim^i x$ voor alle i dan is $b^i(y) \leq b^i(x)$ voor alle i, dus $b(y) \leq b(x)$ waaruit $x \succsim_s y$. En als $y \succ^i x$ voor alle i dan is $b^i(y) < b^i(x)$ voor alle i, dus $b(y) < b(x)$ waaruit $x \succ_s y$.

Oplossing 13 Deze sociale-keuze-regel voldoet aan het vergelijkbaarheids-, transitiviteits- onafhankelijkheid-van-alternatieven-criterium en. het afwezigheid-van-dictator-criterium, maar niet aan het paretocriterium.

Oplossing 14 Hier is een poging: als voor een zeker preferentieprofiel een alternatief x sociaal beter dan alternatief y is, dan blijft dat zo voor elk preferentieprofiel waar in elke individuele rationele preferentierelatie 'de waardering van x boven y niet afneemt'.

Oplossing 15 Nee. Om dat te bewijzen bekijken we het geval van $N = 2$ en dat X uit de drie elementen a, b, c bestaat. Verder zij $\succsim$ het preferentieprofiel gedefinieerd door $a \succ^1 b \succ^1 c$, $a \succ^2 c \succ^2 b$. Dan is $a \succ_s b$. Beschouw nu het preferentieprofiel $\trianglerighteq$ gedefinieerd door $a \triangleright^1 b \triangleright^1 c$, $a \triangleright^1 b \triangleright^2 c$. Dan geldt voor alle i: $a \succsim^i b \Rightarrow a \trianglerighteq^i b$ en $a \succ^i b \Rightarrow a \triangleright^i b$. Maar er geldt $a \_{s} b$ en dus niet $a \triangleright_s b$.

A Relaties

$\top$ **1** *(Notie van relatie.) Zij X een verzameling. Een (binaire) relatie op X is een tweestemmig predikaat over X, i.e. voor elk paar elementen (x, y) van X een (wiskundige) uitspraak over x en y die waar of onwaar is;*[25] *we noteren deze uitspraak met xRy.*[26]

Gegeven een relatie R op X heet de verzameling $\{(x, y) \in X \times X \mid xRy\}$ de grafiek van R.[27]

$\top$ **2** *(Duale relatie.) De duale relatie van R is gedefinieerd als de relatie $R^\star$ op X gegeven door: $xR^\star y \Leftrightarrow yRx$.*

$\top$ **3** *(Diverse typen relaties.) Een relatie R op X heet*

- *reflexief als voor alle $x \in X$: xRx;*
- *irreflexief als voor alle $x \in X$: $\neg(xRx)$;*
- *transitief als voor alle $x, y, z \in X$: $\left[xRy \text{ en } yRz\right] \Rightarrow xRz$;*
- *vergelijkbaar, als voor alle $x, y \in X$: xRy of yRx;*[28]
- *antisymmetrisch als voor alle $x, y \in X$: $\left[xRy \text{ en } yRx\right] \Rightarrow x = y$;*
- *symmetrisch als voor alle $x, y \in X$: $xRy \Rightarrow yRx$;*
- *a-symmetrisch als voor alle $x, y \in X$: $\neg(xRy \text{ en } yRx)$.*

Merk op dat een irreflexieve relatie niet reflexief is als X niet-leeg is, een vergelijkbare relatie reflexief is en dat een a-symmetrische relatie antisymmetrisch en irreflexief is. Verder heet een relatie een

- *pré-ordenings-relatie*[29] *indien deze reflexief en transitief is;*
- *partiële ordenings relatie indien deze reflexief, transitief en antisymmetrisch is;*
- *totale ordeningsrelatie als deze vergelijkbaar, transitief en antisymmetrisch is;*
- *equivalentierelatie indien deze reflexief, transitief en symmetrisch is.*

[25] 'Binair' slaat op 'paren' (x, y) en niet op het waar of onwaar zijn.
[26] Een iets anders ogende manier, die op hetzelfde neerkomt, om de notie van relatie in te voeren is: een relatie R op X is een deelverzameling van het cartesisch product $X \times X$. Het verband is: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.
[27] Zie Opgave **??** voor voorbeelden van relaties.
[28] In de economie spreekt men ook wel van volledige relatie. Deze terminologie zullen we niet hanteren.
[29] Synoniem: quasi-ordenings-relatie.

$\top$ **4** *(De notaties van Hernstein en Milnor voor pré-orderningsrelaties.) Voor een pré-ordenings-relatie zullen we meestal de notatie* $\succsim$ *gebruiken. Gegeven een pré-ordenings-relatie* $\succsim$ *op* X *duidt men zijn duale relatie* $\succsim^\star$ *aan met* $\precsim$ *en definieert men de relaties* $\sim, \succ, \prec$ *op* $\mathcal{P}$ *als volgt:*

$$x \sim y \text{ betekent } x \precsim y \wedge y \succsim x,$$

$$x \succ y \text{ betekent } x \succsim y \ \wedge \ \neg(x \sim y),$$

$$x \prec y \text{ betekent } x \precsim y \ \wedge \ \neg(x \sim y).$$

Als $\succsim$ *een vergelijkbare pré-ordenings-relatie is, dan geldt voor alle* $x, y \in X$*:* $\neg(x \succsim y) \ \Rightarrow x \prec y$.

$\top$ **5** *(Maximale en grootste elementen.) Gegeven een pré-ordeningsrelatie* $\succsim$ *op* X*. Een element* x *van* X *heet*

- *een* *__maximaal element__* *als er geen* $y \in X$ *is met* $y \succ x$*;*
- *een* *__minimaal element__* *als er geen* $y \in X$ *is met* $y \prec x$*;*
- *een* *__grootste element__* *als* $x \succsim y$ *voor alle* $y \in X$*;*
- *een* *__kleinste element__* *als* $x \precsim y$ *voor alle* $y \in X$*.*

Elk grootste element is een maximaal element en elk kleinste element is een minimaal element. En als $\succsim$ *tevens vergelijkbaar is, dan is elk maximaal element ook een grootste element en elk minimaal element ook een kleinste element.*

$\top$ **6** *(Ongelijkheidsrelaties op* $\mathbb{R}^n$*.) Op* $\mathbb{R}^n$ *definieert men de relaties* $\geq, >, \gg$ *door:*

- $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}: \ x_k \geq y_k \ (1 \leq k \leq n)$*;*
- $\mathbf{x} > \mathbf{y}: \ \mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ *en* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$*;*
- $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}: x_k > y_k \ (1 \leq k \leq n)$.

Verder duiden we met $\leq, <, \ll$ *de duale relaties van respectievelijk* $\geq, >, \gg$ *aan. De relatie* $\geq$ *is reflexief, transitief, maar niet vergelijkbaar. De relaties* $>$ *en* $\gg$ *zijn transitief, maar niet reflexief.*

Referenties

K. Arrow. A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, 58(4): 328–346, 1950.

K. Arrow. *Social Choice and Individual Values.* John Wiley, 1951.

A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York, 1995.

J. Paris and L. Harrington. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. pages 1133–1142. North-Holland, Amsterdam, 1977.

A. Storcken and H. de Swart. *Verkiezingen, Agenda's en Manipulatie*. Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1992.