Oligopolies

🄯 P. H. M. v. Mouche

2021

Verbeterde versie 0.75

(juni 2026)

Voorwoord

Dit korte typoscript over oligopolies is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl` (indien dat webadres nog bestaat).[1] Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij ⓒ gerespecteerd wordt.

Omdat dit typoscript een versienummer < 1 heeft, voelt de auteur zich niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden. Uiteraard juicht de auteur verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen toe.

Inhoudsopgave

1 Inleiding 3

2 Classificatie 3

3 Monopoliespel 4

4 Oligopolies 7

5 Van oligopolie naar volledige concurrentie 11

6 Von-stackelberg-duopolie-spel 12

7 Prijsleiderschap-duopolie-spel 13

8 Opgaven 14

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Inleiding

In dit hoofdstuk houden we ons bezig met diverse oligopoliespelen en zo met speciale voorbeelden van spelen in strategische en uitgebreide vorm. Mede voor de volledigheid bekijken we in § 3 ook het monopolie dat speltheoretisch de ontaarde situatie van een spel met één speler betreft.

Ook dit hoofdstuk behoort tot het *softe* deel van het typoscript en is daarmee niet mathematisch rigoureus. Opgemerkt zij dat het verkrijgen van mathematisch rigoureuze resultaten voor oligopolies, bijvoorbeeld die over existentie en uniciteit van cournot-evenwichten, een soort specialisme *an sich* schijnt te zijn waar sommige wetenschappers een flink deel van hun leven mee bezig waren/zijn.

Als de lezer bekend is met micro-economische noties zoals artikel, prijs, marktvorm, winst, kostenfunctie, marktvraagfunctie, prijs-vraag-relatie, winstmaximalisatie en elasticiteit dan is dat mooi meegenomen, maar nodig is dat niet.

2 Classificatie

Oligopolies behelzen marktvormen voor artikels. Kenmerkend voor een oligopolie is dat er een klein aantal winstmaximaliserende producenten van een artikel zijn,[2] en wel zó klein dat elk van hen marktmacht heeft, i.e. zo klein dat elk van hen (directe) invloed op de prijs van het artikel heeft. Een marktvorm waar er subjecten met marktmacht zijn heet imperfect; een oligopolie betreft dus een imperfecte marktvorm. Verder zijn er een groot aantal individueel opererende kopers die de prijs niet direct beïnvloeden kunnen. In zekere zin kan er door het geringe aantal producenten een bijzondere vorm van onzekerheid ontstaan: een actie van een van de producenten heeft invloed op de (winst van de) andere producenten die op verschillende manieren daarop kunnen reageren. Men kan zeggen dat een oligopolistische markt tussen twee uitersten in ligt, namelijk tussen volledige concurrentie en monopolie.

Een classificatie van oligopolies kan gebaseerd worden op de vraag of de artikels die de producenten verkopen voor de kopers homogeen of heterogeen zijn;[3] men spreekt dan van homogeen oligopolie respectievelijk van heterogeen oligopolie. Bij alle oligopolies die wij verder bekijken zullen we aannemen dat de artikels homogeen zijn; dat is doorgaans namelijk het meest eenvoudige geval. Een andere classificatie kan gebaseerd worden aan de hand van de natuur van de acties van de producenten. Deze onderscheidt men doorgaans in prijsacties of hoeveelheidsacties en in simultane of sequentiële acties. We spreken van een prijsactie indien de producent de prijs bepaalt en “de markt” de daarbij horende hoeveelheid bepaalt die hij zal verkopen. En van een hoeveelheidsactie indien de producent de hoeveelheid die hij verkopen wil bepaalt en “de markt” de daarbij horende prijs waar-

[2] Lees eventueel "verkopersïn plaats van "producenten". Voor het productieaspect *an sich* zal hier geen aandacht zijn.

[3] Indien een subject elk artikeltype uit een klasse als hetzelfde beschouwt, dan spreekt men van homogene artikeltypen voor dat subject en anders van heterogene artikeltypen. Het laten knippen van haren bijvoorbeeld waar men ook nog tijdens het knippen naar een videofilm kan kijken en een kopje koffie met een kaakje krijgt is voor veel subjecten een ander artikeltype dan louter het knippen.

voor dat plaats zal vinden bepaalt. We spreken van simultane acties als alle producenten tegelijkertijd hun acties ondernemen en van sequentiële acties als de producenten de een na de ander een actie ondernemen. In het speciale geval van twee producenten waar eerst een der producenten een actie onderneemt en daarna de ander, noemt men de producent die als eerste een actie onderneemt de leider en de andere de volger. Combinatie van bovenstaande typen van acties leidt tot de volgende oligopolietypen:

	prijs	**hoeveelheid**
simultaan	Bertrand-	Cournot-
sequentieel	Prijsleiderschap-	Von-Stackelberg-

De producenten worden in oligopolistische modellen in het bijzondere gekenmerkt door hun kostenfuncties. De markt op zijn beurt weerspiegelt zich in de prijs-vraag-relatie, die op haar beurt het gedrag van de vragers weerspiegelt.

3 Monopoliespel

Beschouwen we de markt van een (homogeen) artikel waarvoor er één producent is, monopolist[4] geheten, er veel kopers zijn en de monopolist een prijszetter is, dus zelf de prijs van dat artikel bepaalt. De motivatie van de monopolist is winstmaximalisatie. Prijsvorming van het artikel wordt gemodelleerd middels een marktvraagfunctie

$$Q(p)$$

met de volgende interpretatie: de monopolist wordt voor elke door hem zelf te kiezen positieve prijs p van het artikel geconfronteerd met een vraag $Q(p)$ van de consumenten naar dat artikel. Dat impliceert dat voor prijs p niet meer dan een hoeveelheid $Q(p)$ verkopne kan. Verder nemen we aan dat een hoeveelheid q van het artikel

$$\mathcal{C}(q)$$

kost.[5] We maken de gebruikelijke veronderstelling dat de marktvraagfunctie Q dalend en de kostenfunctie $\mathcal{C}$ stijgend is. Duiden we nog (aannemende dat dat kan) met

$$P(q)$$

de inverse van $Q(p)$, i.e. de inverse marktvraagfunctie, aan. Naar P verwijzen we ook wel als prijs-vraag-relatie.

Merk op dat voor de monopolist slechts bepaalde combinaties van prijzen die hij kan zetten en hoeveelheden die hij kan verkopen in aanmerking komen. Als de monopolist namelijk een zekere hoeveelheid wil verkopen, dan kan hij dat slechts doen voor een prijs waarbij de marktvraag tenminste gelijk aan die hoeveelheid is. I.e. als hij q wil verkopen

[4] Marx ziet monopolisten als typisch voor een van de laatste stadia van het kapitalisme.

[5] Merk op dat de kostenfunctie slechts van q afhangt en dus de prijzen van de productiefactoren als vast beschouwd worden en reeds in $\mathcal{C}$ verwerkt zijn.

dan kan hij dat doen voor elke prijs p tussen 0 en $P(q)$. Als q en p dusdanig zijn, dan is zijn winst gelijk aan $pq - \mathcal{C}(q)$ hetgeen als functie van p maximaal voor $p = P(q)$ is. Opbrengst minus kosten vormend leidt dat tot een winst ter grootte

$$\breve{\Pi}(q) = P(q)q - \mathcal{C}(q).$$

We noemen de functie $\breve{\Pi}$ de secundaire winstfunctie.[6]

In reëele-wereld-bewoordingen luidt het winstmaximalisatieprobleem van de monopolist: gegeven een marktvraagfunctie Q en een kostenfunctie $\mathcal{C}$, bepaal de te verkopen hoeveelheden q die de secundaire winstfunctie $\breve{\Pi}$ maximaliseren. Zo'n hoeveelheid noemen we ook wel optimale hoe- veelheid, de erbij horende prijs optimale prijs en de erbij horende winst de maximaal haalbare winst.

Omdat $\breve{\Pi}$ een functie van één variabele is, als alles even meezit, er een unieke optimale hoeveelheid en kan deze gevonden worden als het unieke nulpunt van de afgeleide van de winstfunctie. Met

$$R(q) := P(q) \cdot q,$$

de opbrengstfunctie, leidt dit tot

$$\breve{\Pi}'(q) = R'(q) - \mathcal{C}'(q) = 0$$

en dus tot het volgende recept voor de optimale hoeveelheid, welke we nog Monopolieregel noemen:

(Monopolieregel.) Men losse de volgende vergelijking in de onbekende q op: $P'(q)q + P(q) = \mathcal{C}'(q)$.

Dus in de optimale hoeveelheid is de marginale opbrengst gelijk aan de marginale kosten. De optimale prijs vindt men door de optimale hoeveelheid in de inverse marktvraagfunctie P in te vullen en de maximaal haalbare winst door de optimale hoeveelheid in $\breve{\Pi}$ in te vullen.

Duid met ϵ_P de elasticiteit van P aan, i.e. $\epsilon_P = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P}$. Opmerkend dat $R'(q) = P'(q)q + P(q)$ en dat volgens de Monopolieregel voor een optimale hoeveelheid q er $\mathcal{C}'(q) = R'(q)$ geldt, volgt dat in zo'n optimale hoeveelheid

$$m := \frac{P - \mathcal{C}'}{P} = -\epsilon_P. \tag{1}$$

Omdat $-\epsilon_P$ positief is, impliceert dit:

De optimale prijs is hoger dan de marginale kosten bij de optimale hoeveelheid en in die hoeveelheid geldt $\lvert\epsilon_P\rvert < 1$.[7]

Het getal m hierboven heet nog de monopoliegraad van Lerner.[8] In het algemeen: als we een producent in een of andere marktvorm voor een artikel hebben, dan heeft het

[6] Er bestaat ook een primaire winstfunctie. Dat is de functie die de winst weergeeft in termen van de productiefactorhoeveelheden. Daarmee werken we hier niet.

[8] Synoniem: winstmargefactor.

doorgaans zin om in het marktevenwicht van die marktvorm (die aanleiding geeft tot een evenwichtsprijs en evenwichtshoeveelheid voor dat artikel) de monopoliegraad van Lerner door bovenstaande formule te definiëren.[9]

Laten we even even ingaan op niet zo wenselijke verschijnselen die zich kunnen voordoen bij berekeningen aan monopolies. Bekijken we daartoe eens het monopolie voor $Q(p) = p^{-2}$ en $\mathcal{C}(q) = \frac{1}{2}\sqrt{q}$. Dan is $P(q) = \frac{1}{\sqrt{q}}$ waaruit $\breve{\Pi}(q) = \frac{1}{2}\sqrt{q}$. We zien dat er geen (eindige) optimale hoeveelheid is. Dus het winstmaximalisatieprobleem hoeft geen oplossing te hebben. Een ander niet zo wenselijk verschijnsel is dat de maximaal haalbare winst negatief kan zijn. Maar als $\mathcal{C}(0) = 0$ kan dat niet omdat dan $\breve{\Pi}(0) = P(0) \cdot 0 - \mathcal{C}(0) = 0$. Verder kan dit verschijnsel ook niet optreden als de marktvraag bij een prijs die gelijk aan de minimale gemiddelde kosten is groter is dan de hoeveelheid waar die kosten minimaal zijn. In een formule: als $Q(p^0) > q^0$. Inderdaad: $Q(p^0) > q^0$ geeft (omdat P dalend is) $P(q^0) > p^0$. Omdat $\frac{\mathcal{C}(q^0)}{q^0} = p^0$ volgt $\breve{\Pi}(q^0) = P(q^0)q^0 - \mathcal{C}(q^0) > p^0q^0 - \mathcal{C}(q^0) = 0$, zoals gewenst.

In overeenstemming met de dalendheid van P veronderstellen we nu verder dat $P' < 0$ is. Bekijken we nu eens de vergelijkingen

$$P'(q)q + P(q) = \mathcal{C}'(q);$$

$$P(q) = \mathcal{C}'(q).$$

Stel q_m (> 0) is de oplossing van de eerste en q_v die van de tweede. Met

$$I(q) := P(q) - \mathcal{C}'(q)$$

geldt dan

$$I(q_v) = 0,\ I(q_m) = -P'(q_m)q_m > 0.$$

Als we nog weten dat $\mathcal{C}'' \geq 0$ is, dan is $I' < 0$ en dus I strikt dalend. Dan volgt nog

$$q_v > q_m.$$

Tenslotte bekijken we nogmaals het winstmaximalisatieprobleem in meer detail. Daartoe allereerst het volgende precieze resultaatje. Stel A en B zijn niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en $P : A \to B$ is een bijectie. Zij $P^{<-1>} : B \to A$ de inverse van P. We noteren $P^{<-1>}$ ook wel met Q. De elementen in A duiden we ook wel aan met q en die in B met p. Dus $P \circ Q = \mathrm{Id}$ en $Q \circ P = \mathrm{Id}$. Verder zij gegeven een functie $C : A \to \mathbb{R}$. Definieer $\Pi : A \to \mathbb{R}$ door

$$\Pi(q) := P(q)q - C(q)$$

en definieer $\breve{\Pi} : B \to \mathbb{R}$ door

$$\breve{\Pi}(p) := pQ(p) - C(Q(p)).$$

Hier is het resultaat waar het ons om gaat:

[9] Voor de marktvorm van volledige concurrentie geldt volgens de Prijs-is-marginale-kostenregel $P = \mathcal{C}'$ en is de monopoliegraad van Lerner dus nul.

Als $q_\star$ een maximaliseerder van Π is, dan is $P(q_\star)$ een maximaliseerder van $\breve{\Pi}$ en $\Pi(q_\star) = \breve{\Pi}(P(q_\star))$.
Als $p_\star$ een maximaliseerder van $\breve{\Pi}$ is, dan is $Q(p_\star)$ een maximaliseerder van Π en $\breve{\Pi}(p_\star) = \Pi(Q(p_\star))$.

Bewijs: er geldt $\breve{\Pi}(P(q_\star)) = P(q_\star)Q(P(q_\star)) - C(Q(P(q_\star)) = P(q_\star)q_\star - C(q_\star) = \Pi(q_\star)$. Dus de tweede bewering geldt. De eerste bewering volgt als we kunnen laten zien dat $\breve{\Pi}(p) \leq \Pi(q_\star)$ $(p \in B)$. En dat kunnen we: fixeer $p \in B$. Omdat $p = P(Q(p))$ volgt $\breve{\Pi}(p) = pQ(p) - C(Q(p)) = P(Q(p))Q(P(Q(p))) - C(Q(P(Q(p)))) = P(Q(p))Q(p) - C(Q(p)) = \Pi(Q(p)) \leq \Pi(q_\star)$. Dus de eerste bewering geldt. De overige twee worden net zo bewezen.

Voorbeeld: $A = B = \mathbb{R}_{++}$, $P(q) = q^{-1/2}$ en $C(q) = q^2$. Nu geldt $Q(p) = p^{-2}$, $\Pi(q) = \sqrt{q} - q^2$ en $\breve{\Pi}(p) = p^{-1} - p^{-4}$. Verder heeft Π als unieke maximaliseerder $4^{-2/3}$ en $\breve{\Pi}$ heeft als unieke maximaliseerder $4^{1/3} = P(4^{-2/3})$.

Deze eenvoudige wiskundige exercitie leidt tot de volgende opmerking die van belang kan zijn voor economisten: in een standaard monopoliemodel waar de marktvraagfunctie Q inverteerbaar is, doet het er (wellicht) niet toe of men met deze vraagfunctie of met haar inverse werkt. Reden voor deze opmerking is het volgende. In de reële wereld zijn de acties waarmee monopolisten zich aan de consumenten presenteren doorgaans prijsacties: U lope maar langs een monopolistische winkel en lette daar op het prijskaartje wat aan het goed hangt. Deze opmerking kan ertoe leiden dat men werken met $\breve{\Pi}$ prefereert boven dat met Π. Maar werken met $\breve{\Pi}$ is ingewikkelder vanwege de term $C(Q(p))$.

Dat men enigszins voorzichtig moet zijn met het geven van reële-wereld-interpretaties aan $\breve{\Pi}$ toont de volgende vraag van Pietje Puk, aan. Kan men redelijkerwijs aan $\breve{\Pi}(p)$ de volgende reële-wereld-interpretatie kan geven? $\breve{\Pi}(p)$ is de maximale winst die de monopolist kan behalen als hij een prijs p voor zijn goed vraagt. Welnu helpen we hem: aannemende dat Q strikt dalend is, kan de monopolist als hij een zekere prijs p wil vragen deze prijs verkrijgen voor elke hoeveelheid q tussen 0 en $Q(p)$ (omdat hij die hoeveelheid moet kunnen verkopen). Als q en p dusdanig zijn, dan is zijn winst gelijk aan $pq - C(q)$. De maximale winst die hij kan behalen is dus $max_{q \in [0,Q(p)]} pq - C(q)$. Dat er gevallen zijn waarvoor die winst niet gelijk is aan $\breve{\Pi}(p)$ zien we door $p = 3$ te nemen in het geval waar $Q(p) = p^{-1}$, $C(q) = 7q$ is. Dan $\breve{\Pi}(3) = 1 - 7/3$. En $max_{q \in [0,1/3]} 3q - 7q = 0$. Maar voor prijzen p groter dan 7 doet dat euvel zich niet voor, zoals men vlug nagaat.

4 Oligopolies

Beschouwen we nu n winstmaximaliserende producenten die een (homogeen) artikel produceren en dat artikel tegelijkertijd op de markt brengen. Daarbij wordt de prijs van dat artikel bepaald door een prijs-vraag-relatie P.[10] Laten we de producenten aanduiden met $1, \ldots, n$. De inverse marktvraagfunctie is bij deze marktvorm als volgt nader te

[10] Merk op dat we hier van meet af aan met p in plaats van met Q werken.

interpreteren: als producent i een hoeveelheid q^i aanbiedt, dan bieden de producenten samen de hoeveelheid $Q = q^1 + \cdots + q^n$ op de markt aan, verkopen deze hoeveelheid, en wordt $P(Q)$ de prijs van het artikel. Verder zij $\mathcal{C}^i$ de kostenfunctie van producent i.

Bovenstaande leidt tot de volgende specificatie van de secundaire winstfunctie van producent i in het cournot-oligopolie:[11]

$$\breve{\Pi}^i(q^1, \ldots, q^n) \quad = \quad P(q^1 + \cdots + q^n)q^i - \mathcal{C}^i(q^i).$$

We zien dat de winst van een producent niet alleen van zijn eigen actie afhangt maar ook van die van zijn concurrenten.[12] Merk op dat als een van de producenten zijn hoeveelheid vergroot dat dan de prijs van het artikel waarvoor het verkocht wordt (voor alle producenten) daalt. Merken we ook op dat, vanwege de dalendheid van P, voor elke vaste hoeveelheid die de ene producent op de markt brengt, de winst van die producent een dalende functie is van de hoeveelheid die de andere producent op de markt brengt.

Omdat de winst van een producent niet alleen van zijn eigen actie afhangt maar ook van die van zijn concurrenten is het niet duidelijk wanneer men in deze situatie nu ervan kan spreken dat de winst maximaal is. Dat is vervelend want nu hebben we aan winstmaximalisatie niet genoeg om het gedrag van de producenten mee te analyseren. Toch kan men een redelijk oplossingsconcept aangeven door het nash-evenwichts-oplossingsconcept erbij te halen. Wat men dus doet is het zoeken naar een multi-actie $(q^1, \ldots, q^n)$ zodanig dat in deze situatie het zich voor geen der producenten loont om als enige af te wijken: zo'n multi-actie heet cournot-evenwicht en de bijbehorende prijs heet cournot-evenwichtsprijs.

Reeds vertrouwd zijnde met spelen in strategische vorm zien we dat het cournot-oligopolie gezien kan worden als een dusdanig spel. Het cournot-evenwicht is niks anders dan het nash-evenwicht van dat spel. Vandaar ook wel het synoniem cournot-nash-evenwicht voor cournot-evenwicht. Preciezer: de spelers corresponderen met de producenten, elke speler i heeft als strategieverzameling $[0, \infty)$, een strategie van speler i correspondeert met een hoeveelheid q^i die speler i op de markt brengt en daar verkoopt en de uitbetalingsfunctie f^i van speler i is gelijk aan $f^i(q^1, \ldots, q^n) = P(q^1 + \cdots + q^n)q^i - \mathcal{C}^i(q^i)$ i.e. is gelijk aan zijn secundaire winstfunctie.

Omdat een cournot-evenwicht een nash-evenwicht is, hebben we gezien dat als alles even meezit het een cournot-evenwicht zijn we, volgens (**??**) vertalen kunnen in $\frac{\partial \breve{\Pi}^i}{\partial q^i} = 0$. Uitwerken daarvan leidt tot:

[11] Antoine Cournot (1801-1877), Fransman, wiskundige, filosoof, economist en universiteitsbeheerder. Hij was de eerste die een vraag-prijs-relatie beschouwde en bovendien de eerste die calculus gebruikte om economische problemen mee op te lossen. Verrichtte bijvoorbeeld baanbrekend werk op het terrein van het oligopolie en monopolie terwijl in zijn dagen velen slechts het beeld van volkomen mededinging voor ogen hadden. En al lang voor bijvoorbeeld Walras dacht hij aan een algemene evenwichtstheorie. Kan als de grondlegger van de mathematische economie beschouwd worden. Doordat zijn boek "Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses" [**?**] dat hij in 1838 publiceerde en zijn tijd ver vooruit was, niet goed ontvangen werd, vooral vanwege het wiskundige karakter, verliet hij voor 25 jaar de economie. Daarna publiceerde hij een boek dat minder wiskundig van aard was om te bereiken dat hij meer gelezen zou worden, maar waarschijnlijk ook omdat hij langzaam aan blind werd.

[12] Het model van homogeen oligopolie is te generaliseren tot heterogeen oligopolie door meerdere prijs-vraag-relaties te introduceren.

(Cournotregel.) Men bepale de oplossing van de volgende n vergelijkingen in de n onbekenden $q^1, \dots, q^n$:

$$P'(q^1 + \cdots + q^n)q^i + P(q^1 + \cdots + q^n) - \mathcal{C}'(q^i) = 0 \ (1 \leq i \leq n).$$

Eenmaal het cournot-evenwicht gevonden hebbende, vindt men de cournot-evenwichtsprijs door invullen van het cournot-evenwicht in $P(Q)$.

Zoals tegen elk nash-evenwicht kunnen we ook tegen een cournot-evenwicht aankijken middels beste-antwoord-correspondenties, die men echter in de economie meestal functie!reactie- noemt.[13] Laten we dat hier nog eens even expliciet voor de context in kwestie uitleggen. Beschouw de (secundaire) winstfunctie $\breve{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n)$ van producent i als functie van q^i bij vaste grootten van de overige q^j's. Producent i kan nu de q^i bepalen die zijn winst maximaliseert. Deze q^i zal afhangen van de grootte van de overige q^j's. Op die manier is er, als alles even meezit, een (functioneel) verband tussen q^i en die overige q^j's dat we met $R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n)$ aan zullen geven; R^i is de reactiefunctie van producent i. Kortom:

> $R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n)$ maximaliseert de functie $\breve{\Pi}^i(q^1, \dots, q^n)$ als functie van de hoeveelheid q^i bij gegeven overige hoeveelheden.

Dit leidt tot: men bepale de oplossing van de volgende n vergelijkingen in de n onbekenden $(q^1, \dots, q^n)$

$$q^i = R^i(q^1, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n)) \ (1 \leq i \leq n).$$

In het bovenstaande is de notie van cournot-evenwicht uitgelegd, maar is voorbijgegaan aan de vraag hoe een cournot-evenwicht tot stand zou kunnen komen. We gaan nu uitleggen hoe men, voor het gemak in de context van het duopolie, uitgaande van de reactiefuncties dynamisch gedrag kan introduceren. Daartoe nemen we aan dat we met discrete tijd te maken hebben: $t = 0, 1, 2, \dots$. Uitgaande van een beginsituatie $q^1(0)$, $q^2(0)$ zetten we voor $t \geq 0$ vervolgens

$$q^1(t+1) = R^1(q^2(t)), \ q^2(t+1) = R^2(q^1(t)),$$

waar R^i de reactiefunctie van producent i voorstelt. Dus in periode 0 brengt producent 1 een hoeveelheid $q^1(0)$ en producent 2 een hoeveelheid $q^2(0)$ de markt, in periode 1 brengt producent 1 een hoeveelheid $q^1(1) = R^1(q^2(0))$ en producent 2 een hoeveelheid $q^2(1) = R^2(q^1(0))$ op de markt. In periode 2 brengt producent 1 een hoeveelheid $q^1(2) = R^1(q^2(1))$ en producent 2 een hoeveelheid $q^2(2) = R^2(q^1(1))$ op de markt, et cetera. Men kan dit als volgt interpreteren: de producenten leren nooit van de opgedane ervaringen, maar nemen bij de bepaling van de optimale actie in elke periode aan dat de andere producent zijn hoeveelheid van de vorige periode op de markt zal brengen. Het spreekt voor zich dat dit op zijn minst naïef gedrag genoemd kan worden, als men al niet van dom gedrag spreken mag.

[13]daarbij er stilzwijgend vanuit gaan dat de correspondentie singeltonwaardig is.

De hier gevolgde manieren om dynamica te introduceren hoeven zich niet te beperken tot cournot-oligopolies, maar kan veel algemener voor spelen in strategische vorm die wel-gedefinieerde reactiefuncties hebben. Het nash-evenwichts-concept is dus ondanks zijn "statische definitie" niet helemaal ontbloot van dynamica. Het probleem met dit soort van dynamica in het algemeen is dat deze lang niet altijd reëel gedrag beschrijft.

Bekijken we nu even kartels. Dat betreft de situatie waar de producenten gaan samenspannen en samenwerken om de totale winst te maximaliseren. Een kartel heeft veel weg van een monopolie. We geraken van bovenstaand cournot-oligopoliemodel tot een kartel door één beslisser in te voeren die beslist hoe alle producenten ageren. Deze beslisser heeft dus zeggenschap over de multi-actie $(q^1, \ldots, q^n)$. De secundaire winstfunctie van het kartel is

$$\breve{\Pi}_{\mathrm{kart}}(q^1, \ldots, q^n) = P(q^1 + \cdots + q^n)(q^1 + \cdots + q^n) - (\mathcal{C}^1(q^1) + \cdots + \mathcal{C}^n(q^n)),$$

dat is de som der secundaire winstfuncties van alle producenten. Een multi-actie $(q^1, \ldots, q^n)$ die de secundaire winstfunctie $\breve{\Pi}(q^1, \ldots, q^n)$ maximaliseert heet kartelevenwicht en de bijbehorende prijs heet kartelevenwichtsprijs. In speltheoretische termen is een kartelevenwicht dus niets anders dan een volledig coöperatieve multi-strategie. Eenmaal het kartelevenwicht gevonden hebbende vindt men de kartelevenwichtsprijs door invullen van het kartelevenwicht in $P(Q)$. Als alles even meezit, dan voldoet een kartelevenwicht aan

$$\frac{\partial \breve{\Pi}_{\mathrm{kart}}}{\partial q^i} = 0 \ (i = 1, \ldots, N).$$

Daaruit:

(Kartelregel.) Men losse de volgende n vergelijkingen in de n onbekenden $q^1, \ldots, q^n$ op: $P'(q^1 + \cdots + q^n)(q^1 + \cdots + q^n) + P(q^1 + \cdots + q^n) = \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Dat impliceert daarom het volgende resultaat:

> In een kartelevenwicht zijn de marginale kosten van alle producenten aan elkaar gelijk.

Dus als $(q^1, \ldots, q^n)$ een kartelevenwicht is, dan is

$$\mathcal{C}^{1\prime}(q^1) = \ldots = \mathcal{C}^{n\prime}(q^n). \tag{2}$$

Er bestaat bij een kartel de neiging om vals te spelen, i.e. om niet samen te spannen: in het kartel-evenwicht, kan elke producent zijn winst vergroten door meer te verkopen. In die zin is een kartel instabiel. Willen de kartelleden het kartel in stand houden, dan is het voor hen goed als men vals spelen kan detecteren (en bestraffen). In speltheoretische termen: een kartel-evenwicht is geen nash-evenwicht. We zullen dit hier nu laten zien door te laten zien voor producent i in een kartel-evenwicht $\frac{\partial \breve{\Pi}}{\partial q^1} > 0$ is. Welnu, in een kartelevenwicht geldt $P'(Q)Q + P(Q) = \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$. Daaruit $\frac{\partial \breve{\Pi}^i}{\partial q^i}(\mathbf{q}) = P'(Q)q^i + P(Q) - \mathcal{C}^{i\prime}(q^i) > P'(Q)Q + P(Q) - \mathcal{C}^{i\prime}(q^i) = 0$.

5 Van oligopolie naar volledige concurrentie

Het is evident dat een monopolie een speciaal geval van een oligopolie is: namelijk eentje met één producent. Minder evident is dat een oligopolie met heel veel producenten lijkt op volledige concurrentie.[14] Aardig is nu dat we het waarheidsgehalte van die bewering handig in kunnen zien middels de volgende speltheoretische analyse.

Voor een cournot-oligopolie voor $n = 1$, i.e. in het geval van één producent wordt de conditie voor een cournot-evenwicht $P'(q)q + P(q) = \mathcal{C}'(q)$, i.e. de Monopolieregel uit § 3. Dat is dus simpel. Ook het volgende best gewichtige resultaat geldt:

> Als alles even meezit, dan tendeert een cournot-oligopolie waarbij het aantal producenten naar oneindig gaat naar volledige concurrentie.

Natuurlijk hangt dit "gewichtige resultaat" wel *au fond* nog in de lucht omdat het niet duidelijk is wat we ermee bedoelen. Om er betekenis aan te geven gaan we nu asymptotiek voor aantal producenten naar oneindig bedrijven. Beschouwen we dus maar eens een cournot-oligopolie met n producenten (waarvan we dadelijk de limiet van zekere objecten voor $n \to \infty$ gaan nemen). Noteer $Q = q^1 + \cdots + q^n$. Beschouw producent i. Zet $s^i = q^i/Q$; s^i noemt men ook wel het <u>marktaandeel</u> (van producent i). Voor vast aanbod $q^1, \ldots, q^{i-1}, q^{i+1}, \ldots, q^n$ van de overige producenten, geldt, met q^i het optimale aanbod van producent i aanduidend, de <u>formule van Amoroso-Robinson</u>

$$P(1 + s^i \cdot \eta^P) = \mathcal{C}^{i\prime},^{15} \tag{3}$$

waar η^P de vraagelasticiteit van de prijs is. Inderdaad. De winstfunctie van producent i is $\breve{\Pi}^i(q^1, \ldots, q^n) = P(q^1 + \cdots + q^n)q^i - \mathcal{C}^i(q^i)$. Volgens de oligopolieregel geldt $P'(q^1 + \cdots + q^n)q^i + P(q^1 + \cdots + q^n) - \mathcal{C}^{i\prime}(q^i) = 0$. Dus $P'(Q)q^i + P(Q) = \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$. Oftewel $P(Q)\left(1 + P'(Q)\frac{Q}{P(Q)}\frac{q^i}{Q}\right) = \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$. We hebben $\epsilon_P(Q) = \frac{dP}{dq}(Q) \cdot \frac{Q}{P(Q)}$ en daarmee het gewenste resultaat.

Eenmaal (3) hebbend, gaan we bekijken wat we verder kunnen zeggen als producent i een klein deel bestrijkt van de markt, dat is als $s^i \approx 0$. In dat geval komt (3) neer op de bekende conditie "prijs is marginale kosten" voor volledige concurrentie, want in dat geval is $P(Q) \approx \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$. Het aangekondigde resultaat waarom het ons te doen was volgt nu als het marktaandeel s^i naar 0 gaat als n naar oneindig gaat. En dat is inderdaad vaak het geval: als elke producent bijvoorbeeld dezelfde kostenfunctie heeft, dan is in het cournot-evenwicht $q^1 = \cdots = q$ en dus is elke $s^i = 1/N$ hetgeen inderdaad naar nul gaat als n naar oneindig gaat. Als niet alle producenten dezelfde kostenfuncties hebben, dan geldt dezelfde conclusie als in het cournot-evenwicht de q^i niet al te veel van elkaar verschillen.

[14] Eigenlijk is er geen sprake meer van een "oligopolie" als er slechts één of veel producenten zijn. Maar niks belet ons natuurlijk deze situatie te analyseren.

[15] In uitgebreide notatie: $P(Q)(1 + s^i\epsilon_P(Q)) = \mathcal{C}^{i\prime}(q^i)$.

6 Von-stackelberg-duopolie-spel

We bekijken nu von-stackelberg-duopolies.[16] Dat betreft een duopoliemodel met twee producenten, verder met 1 en 2 aangeduid, waar producent 1 de leider en producent 2 de volger is. De kostenfunctie van producent i zij $\mathcal{C}^i$ en laat P de inverse marktvraagfunctie zijn. Het een leider zijn betekent dat deze als eerste een hoeveelheid q^1 op de markt brengt en dat daarna pas de volger een hoeveelheid q^2 op de markt brengt.

Dit duopoliemodel is op te vatten als een spel in uitgebreide vorm: eerst doet de leider een zet en vervolgens de volger. We gaan voor dat spel de terugwaartse-inductie-multi-strategieën bepalen. (We weten al dat elke terugwaartse-inductie-multi-strategie een nash-evenwicht is, zelfs een deelspelperfect nash-evenwicht.) Daartoe bekijken we eerst de reactiefunctie R^2 van de volger. Deze geeft per definitie aan hoeveel de volger zal aanbieden als functie van wat de leider aangeboden heeft. R^2 kan men bepalen door de secundaire winstfunctie $\breve{\Pi}^2(q^1, q^2) = P(q^1+q^2)q^2 - \mathcal{C}^2(q^2)$ van de volger te maximaliseren als functie van q^2 voor vaste q^1. De leider, op de hoogte van de reactiefunctie van de volger, bepaalt nu zijn optimale hoeveelheid q^1 die zijn winst maximaliseert. Een multi-actie (q^1, q^2) met de eigenschap $q^2 = R(q^1)$ noemt men een <u>von-stackelberg-evenwicht</u>. De hoeveelheid van de leider in het von-stackelberg-evenwicht vindt men door de functie $(P(q^1 + R(q^1))q^1 - \mathcal{C}^1(q^1)$ te maximaliseren en, als q^1 dat is, de optimale hoeveelheid q^2 van de volger vervolgens door $P(q^1 + q^2)q^2 - \mathcal{C}^2(q^2)$ als functie van q^2 te maximaliseren.

We vinden zo voor het von-stackelberg-evenwicht (q^1, q^2) het volgende recept:

(Von-stackelberg-regel.) Men bepale de q^1 waar de functie $P(q^1 + R^2(q^1)))q^1 - \mathcal{C}^1(q^1)$ maximaal is en vervolgens de q^2 waar $P(q^1 + q_2)q^2 - \mathcal{C}^2(q^2)$ maximaal is.

Laten we dit recept eens toepassen in geval

$$P(Q) = \max a - bQ, 0), \ c^i(q^i) = c + dq^i,$$

waar $a, b, c, d > 0$ en $a > d$ is. De reactiefunctie R^2 van de volger bepalend leidt tot een winstfunctie voor de leider die gelijk is aan[17]

$$(a - b(q^1 + \frac{a - d - bq^1}{2b}))q^1 - (c + dq^1).$$

Deze is maximaal voor $q^1 = \frac{a-d}{2b}$. Het spel heeft dus een uniek von-stackelberg-evenwicht gegeven door $(\frac{a-d}{2b}, \frac{a-d}{4b})$.

[16] Heinrich Von Stackelberg, Duitser (1905-1946) en economist. Een van de grootste economisten in die tijd in Duitsland. Hing in begin de Nazi-ideologie aan en trad zelfs toe bij de SS. Later stond men hem, als diep gelovige en zeer teleurgesteld over de Nazi-politiek, niet toe zijn lidmaatschap te beëindigen. Hield zich voornamelijk bezig met mathematische economie met betrekking tot markten en de theorie van kapitaal en rente.

[17] In feite is deze uitdrukking niet correct, omdat ze negatief kan worden. Het juiste antwoord is $R^2(q^1) = \max(\frac{a-d-bq^1}{2b}, 0)$. Echter bij dit soort opgaven krijgt men toch, als alles even meezit, de juiste uitkomsten.

7 Prijsleiderschap-duopolie-spel

Beschouw twee spelers, verder aan te duiden met *fabrikant* en met *detaillist* die proberen zoveel mogelijk te verdienen aan wederverkoop van een zeker artikel.

Het model zit als volgt in elkaar. De fabrikant kan het artikel produceren voor een vaste prijs p_f per eenheid. Hij verkoopt het artikel verder door aan de detaillist die het op zijn beurt aan de gebruikers van het artikel wederverkoopt. De fabrikant krijgt bij wederverkoop van een hoeveelheid q van het artikel aan de detaillist te maken met kosten ter grootte van $c_w \cdot q$ en de detaillist krijgt bij wederverkoop van een hoeveelheid q van het artikel te maken met kosten ter grootte van $c_r \cdot q$. We nemen aan dat het verband tussen de prijs die de detaillist zijn klanten rekent en de hoeveelheid die hij bij die prijs aan hen verkoopt gegeven wordt door een prijs-vraag-relatie

$$p_r(q) = d \cdot q^{-1/\delta},$$

waar $\delta < -1$.

Bekijken we nu verder een tweetal varianten. Variant 1 is die waar de fabrikant prijsleider is. In dit geval heeft de detaillist de prijs van de fabrikant zonder meer te accepteren en bepaalt de fabrikant zijn optimale prijs door anticipatie op het gedrag van de detaillist.[18] Dat leidt (zoals we ook zullen zien in (4)) op natuurlijke wijze tot een verband tussen p_w en p_r. Variant 2 behelst de situatie waar de fabrikant en de detaillist samenspannen (kartel) om een zo groot mogelijke gezamenlijke winst te bereiken.

Beschouwen we eerst variant 1. De fabrikant anticipeert als volgt op het gedrag van de detaillist: als ik het artikel voor een prijs p_w aan de detaillist verkoop, dan is de winst van de detaillist als hij een hoeveelheid q verkoopt

$$p_r(q)q - (c_r + p_w)q.$$

De eerste orde conditie voor een maximum van die functie is $p_r + \frac{dp_r}{dq}q - c_r - p_w = 0$. Dit leidt voor mij tot de prijs-vraag-relatie

$$p_w(q) = \frac{1+\delta}{\delta} p_r(q) - c_r. \tag{4}$$

Mijn secundaire winstfunctie is daarom

$$\breve{\Pi}_w(q) := p_w(q)q - (c_w + p_f)q.$$

De eerste orde conditie voor een maximum van die functie is $p_w + \frac{dp_w}{dq}q - c_w - p_f = 0$. Door invullen van (4) in deze vergelijking resteert een vergelijking in q waaruit de winstmaximaliserende hoeveelheid $q^\star$ te halen is en waaruit op hun beurt de optimale $\hat{p_w}$ en $\hat{p_r}$ volgen. Wij kiezen hier een iets andere weg. Daartoe schrijven we eerst bovenstaande eerste orde conditie met behulp van (4) om tot

$$p_w = -\delta^{-2}(1+\delta)p_r + c_w + p_f. \tag{5}$$

[18] Vergelijk deze situatie met die in het Von-stackelberg-duopolie welk ook wel hoeveelheidsleiderschap-duopolie genoemd wordt.

De vergelijkingen (4) en (5) zijn nu twee vergelijkingen in p_r en p_w. Oplossen geeft de optimale prijzen

$$\hat{p_r} = (\frac{\delta}{1+\delta})^2 (c_r + c_w + p_f), \tag{6}$$

$$\hat{p_w} = (1+\delta)^{-1}(\delta(c_w + p_f) - c_r) \tag{7}$$

(en een zekere optimale hoeveelheid $\hat{q}$).

Beschouwen we nu variant 2. De fabrikant en de detaillist spannen samen om een zo groot mogelijke gezamenlijke winst te bereiken. De natuurlijke secundaire winstfunctie voor dat duo is

$$p_r(q)q - (c_r + c_w + p_f)q.$$

Bepaling van de maximaal haalbare winst leidt hier tot een optimale hoeveelheid q^* en een optimale prijs

$$p_r^* = \frac{\delta}{1+\delta}(c_r + c_w + p_f). \tag{8}$$

Vergelijking van (8) met (6) leert, bedenkend dat $\delta < -1$, dat de detaillistprijs p_r^* lager is dan $\hat{p_r}$, i.e. dan die voor de situatie waar ze niet samenspanden, en bijgevolg dat de hoeveelheid die verkocht wordt aan de gebruikers groter is dan bij niet samenspannen. Dat is een enigszins contra-intuïtief resultaat, hetgeen bekend staat onder de naam *dubbele marginalisatie*. Controleren we mede in dit verband nu ook nog even of de gezamenlijke winst bij samenspannen groter is dan de som van de winsten bij niet samenspannen (hetgeen immers de bedoeling van het samenspannen was). Welnu met samenspannen is de gezamenlijke winst $W_1 := p_r(q^*)q^* - (c_r + c_w + p_f)q^*$ en zonder samenspannen is deze $W_2 := p_r(\hat{q})\hat{q} - (c_r + p_w(\hat{q}))\hat{q} + p_w(\hat{q})\hat{q} - (c_w + p_f)\hat{q} = p_r(\hat{q})\hat{q} - (c_r + c_w + p_f)\hat{q}$. Omdat q^*, per definitie, de functie $q \mapsto p_r(q)q - (c_r + c_w + p_f)q$ maximaliseert is inderdaad $W_1 > W_2$.

Merken we nog op dat een en ander onafhankelijk van d, c_w en c_r is. Merken we ook op dat we hier een analyse gegeven hebben zonder nu uit de doeken te doen met wat voor spel we eigenlijk te maken hebben.

8 Opgaven

Opgave 1 *Toon aan dat in Paragraaf 3 de optimale prijs een stijgende functie van de marginale kosten is door te laten zien dat $p_1 < p_2$ is als p_i de optimale prijs bij $\mathcal{C}_i$ is en $\mathcal{C}_1' < \mathcal{C}_2'$ is.*

Opgave 2 *Beschouw een cournot duopolie met $P(Q) = \max(a - Q, 0)$, $\mathcal{C}_1(q_1) = c_1 q_1$, $\mathcal{C}_2(q_1) = c_2 q_2$ waar $a > c_1 \geq c_2 \geq 0$.*

1. *Laat zien dat de reactiefuncties gegeven worden door*

$$R_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1-q_2}{2} \text{ als } q_2 \leq a - c_1, \\ 0 \text{ als } q_2 \geq a - c_1. \end{cases}$$

$$R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c_2-q_1}{2} \text{ als } q_1 \leq a - c_2, \\ 0 \text{ als } q_1 \geq a - c_2. \end{cases}$$

2. Stel $a \geq 2c_1 - c_2$. Laat zien dat $(\frac{a-2c_1+c_2}{3}, \frac{a-2c_2+c_1}{3})$ het unieke cournot evenwicht is.

Opgave 3 *Laat zien dat in elke van de volgende winstmaximalisatieproblemen van een monopolist er een unieke optimale prijs en bepaal deze. Bepaal ook de optimale hoeveelheden en de maximaal haalbare winst.*

a. $Q(p) = \max(100 - 2p, 0)$, $\mathcal{C}(q) = 2q$;

b. $Q(p) = \max(80 - 2p, 0)$, $\mathcal{C}(q) = 24q$;

c. $Q(p) = 10p^{-3}$, $\mathcal{C}(q) = 2q$;

d. $Q(p) = aP^{-\alpha}$ $(a > 0, \alpha > 1)$, $\mathcal{C}(q) = cq$ $(c > 0)$;

e. $P(q) = \max(20 - q, 0)$ *en* $\mathcal{C}(q) = q^2 + 3$.

Opgave 4 *Bepaal de monopoliegraad van Lerner in geval van Opgave 3(d).*

Opgave 5 *Beschouw een monopolie met inverse marktvraagfunctie* $P(q) = \max(b - aq, 0)$ *en een kwadratische kostenfunctie, i.e.* $\mathcal{C}(q) = \alpha q^2 + \beta q + \gamma$. *(Alle parameters zijn positief en* $b > \beta$.*) Laat zien dat de optimale hoeveelheid gelijk aan* $\frac{b-\beta}{2(\alpha+a)}$ *en de optimale prijs gelijk aan* $\frac{2\alpha b-3ab+\alpha\beta}{2(\alpha+a)}$ *is.*

Opgave 6 *Beschouw een monopolist die niet één maar twee typen artikelen verkoopt. Laat* $P_1(q_1) = \max(36 - 3q_1, 0)$ *en* $P_2(q_2) = \max(40 - 5q_2, 0)$ *de inverse marktvraagfuncties van die artikelen zijn en* $\mathcal{C}(q_1, q_2) = q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2$ *de kostenfunctie. Bepaal de optimale prijzen, de optimale hoeveelheden en de maximaal haalbare winst.*

Opgave 7 *Bepaal de cournot-evenwichten en de cournot-evenwichtsprijzen voor de volgende cournot-oligopolies:*

a. $\mathcal{C}^1(q^1) = 20q^1$, $\mathcal{C}^2(q^2) = 20q^2$, $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$.

b. $\mathcal{C}^1(q^1) = 10q^1$, $\mathcal{C}^2(q^2) = \frac{1}{4}(q^2)^2$, $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{5}Q, 0)$.

Opgave 8 *Gegeven twee identieke producenten die geconfronteerd worden met een marktvraagfunctie van de vorm* $Q(p) = \max(b - ap, 0)$ *en een kostenfunctie* $Cc(q) = 4\frac{1}{2}q$.

a. Bepaal de cournot-evenwichten.

b. Laat zien dat men hier niet te maken heeft met een gevangenendilemmaspel.

Opgave 9 *Beschouw het cournot-duopolie uit Opgave 7(b).*

a. Bepaal voor speler i zijn dictator-multi-strategieën.

b. Laat zien dat er een uniek cournot-evenwicht is. Bepaal de winst van de producenten in het cournot-evenwicht; duidt die winst voor producent i aan met π^i.

c. Laat zien dat het cournot-evenwicht pareto-inefficiënt is door een hoeveelheidsbundel (q^1, q^2) te bepalen waarin de winst van elke producent i groter is dan π^i.

Opgave 10 *Gegeven een inverse marktvraagfunctie en een kostenfunctie $\mathcal{C}$ kunnen we daarbij zowel een monopolie als een cournot-duopolie (waar elke producent $\mathcal{C}$ als kostenfunctie heeft) beschouwen. Laat zien dat in geval $\mathcal{C}$ lineair is, de totale hoeveelheid in het cournot-evenwicht groter is dan de optimale hoeveelheid bij een monopolie. (Concludeer uit deze opgave dat de winst van een producent groter is als de andere producent van de markt zou verdwijnen en de resterende producent dus een monopolist wordt.)*

Opgave 11 *Bepaal de kartelevenwichten, de kartelevenwichtsprijzen en de maximaal haalbare winsten voor de volgende kartels:*

a. $P(Q) = \max(4 - Q, 0)$, $\mathcal{C}^1(q^1) = q^1$, $\mathcal{C}^2(q^2) = \frac{1}{2}(q^2)^2$;

b. $p(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$, $c^1(q^1) = 20q^1$, $c^2(q^2) = 20q^2$;

c. $p(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$, $c^1(q^1) = 20q^1$, $c^2(q^2) = 10q^2$.

Opgave 12 *Beschouw een cournot-duopolie met* $P(Q) = \max(2 - \frac{1}{1600}Q, 0)$ *en* $c^1(q^1) = \frac{1}{2}q^1$, $c^2(q^2) = \frac{1}{2}q^2$.

a. Bepaal de cournot-evenwichten.

b. Uitgaande van $q^1(0) = 200$ *en* $q^2(0) = 1000$, *bepaal* $q^1(1), q^2(1), q^1(2), q^2(2), \ldots, q^1(6), q^2(6)$.

Opgave 13 *Bepaal de von-stackelberg-evenwichten in de volgende gevallen:*

a. $\mathcal{C}^1(q^1) = 20q^1$, $\mathcal{C}^2(q^2) = 20q^2$ *en* $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{4}Q, 0)$;

b. $\mathcal{C}^1(q^1) = 10q^1$, $\mathcal{C}^2(q^2) = \frac{1}{4}(q^2)^2$ *en* $P(Q) = \max(200 - \frac{1}{5}Q, 0)$.

Opgave 14 *a. Beschouw een von-stackelberg-duopolie. Laat zien dat voor elke gegeven hoeveelheid die de volger op de markt brengt, de winst van de volger een dalende functie is van de hoeveelheid die de leider op de markt brengt.*

b. Leg uit dat de winst van de leider in het von-stackelberg-duopolie niet lager kan zijn dan zijn winst in het cournot-duopolie.

Opgave 15 *Stel de inverse marktvraagfunctie is* $P(Q) := \max(100 - 2Q, 0)$ *en de kostenfunctie van elke producent is* $\mathcal{C}(q) = 4q$. *Bepaal voor de volgende marktvormen de evenwichtsprijzen, de totale verkochte hoeveelheden en de maximaal haalbare winsten: volledige concurrentie, monopolie, cournot-duopolie, kartel (2 producenten), von-stackelberg-duopolie.*

Opgave 16 *Stel dat in een dorp twee benzinestations actief zijn. Elke dag nemen ze de volgende beslissing: een hoge prijs (Euro per liter)* $1,2$ *of een lage* $1,1$. *Bij gelijke prijzen delen de pomphouders de lokale markt, terwijl bij ongelijke prijzen degene met de laagste prijs zich het grootste marktaandeel toeëigent, zeg* 75%. *Veronderstel dat de winstmarge bij de hoge prijs* 10% *en bij de lage prijs* 8% *is, en dat totale vraag inelastisch en gelijk aan* 1000 *liter is.*

De volgende mogelijkheden zijn er dus: Beide verkopers rekenen de hoge prijs; Beide verkopers rekenen de lage prijs; De ene verkoper rekent de hoge prijs en de andere de lage.

Hieronder is af te lezen wat de winsten zijn bij beide keuzeopties voor de verkopers. Je leest de waardes als volgt af: winst verkoper 1; winst verkoper 2. Het is goed dit even na te rekenen: bijvoorbeeld als beide de lage prijs kiezen, dan verkopen beiden 500 *liter. De opbrengst is dan 550 Euro, hetgeen een winst van 0,08 x 550 = 44 Euro oplevert.*

	Verkoper lage 2 prijs	*Verkoper 2 hoge prijs*
Verkoper 1 lage prijs	$44; 44$	$66; 30$
Verkoper 1 hoge prijs	$30; 66$	$60; 60$

Bepaal het cournot-evenwicht

Oplossing 1 Met $\hat{\pi_1}(p) := pQ(p) - \mathcal{C}_i(Q(p))$ geldt $\hat{\pi_1}(p_1) \geq \hat{\pi_1}(p_2)$ en $\hat{\pi_2}(p_2) \geq \hat{\pi_2}(p_1)$. Uitschrijven en daarna optellen van deze ongelijkheden geeft $(\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1)(Q(p_1)) \geq (\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1)(Q(p_2))$. Deze laatste ongelijkheid is te schrijven als $\int_{Q(p_2)}^{Q(p_1)} ({\mathcal{C}_2}' - {\mathcal{C}_1}')(p)dp \geq 0$. Omdat ${\mathcal{C}^2}' - {\mathcal{C}^1}' > 0$ is moet (als het even meezit) $Q(p_1) > Q(p_2)$ en dus $p_2 > p_1$ zijn.

Oplossing 2 —

Oplossing 3 a. Respectievelijk $26, 48, 1152$.
b. Respectievelijk $32, 16, 192$.
c. Respectievelijk $3, 10/27, 10/27$.
d. Respectievelijk $\frac{\alpha c}{\alpha-1}$, $(\frac{\alpha c}{\alpha-1})^{-\alpha}$, $\alpha^{-\alpha}(\alpha-1)^{\alpha-1}c^{1-\alpha}$.
e. Respectievelijk $p = 15$, 5 en 47.

Oplossing 4 $\frac{1}{\alpha}$.

Oplossing 5 Er geldt $\breve{\Pi}(q) = (b-\beta)q - (a+\alpha)q^2 - \gamma$. $\breve{\Pi}'(q) = 0$ levert $b - \beta - 2(a+\alpha)q = 0$, waaruit het gewenste.

Oplossing 6 —- Respectievelijk $24, 30$; $4, 2$ en 112.

Oplossing 7 a. Cournot-evenwicht: $(240, 240)$. Cournot-evenwichtsprijs: 80.
c. Cournot-evenwicht: $(409\frac{3}{8}, 131\frac{1}{4})$. Cournot-evenwichtsprijs: $p = 91\frac{7}{8}$.

Oplossing 8 a. Om het cournot-evenwicht uit te rekenen merken we eerst op dat de inverse marktvraagfunctie gelijk is aan $p(q) = \frac{b}{a} - \frac{q(p)}{a}$. De reactiefunctie $R^1(q^2)$ van producent 1 vinden we door zijn winstfunctie $\pi^1 = p(q^1+q^2)q^1 - \mathcal{C}(q^1)$ te maximaliseren als functie van q^1, dus door de functie $\frac{b-(q^1+q^2)}{a}q^1 - 4\frac{1}{2}q^1$ te maximaliseren. De afgeleide van deze functie is $\frac{b-2q^1-q^2}{a} - 4\frac{1}{2}$. Dus, dit nul stellende, vinden we $R^1(q^2) = \frac{b}{2} - \frac{4\frac{1}{2}\cdot a}{2} - \frac{q^2}{2}$. De reactiefunctie $R^2(q^2)$ van producent 2 heeft, omdat beide producenten dezelfde kostenfunctie hebben en vanwege een symmetrie argument, dezelfde vorm, en wel $R^2(q^1) = \frac{b}{2} - \frac{4\frac{1}{2}\cdot a}{2} - \frac{q^1}{2}$. Voor een cournot-evenwicht $(q^1_\star, q^2_\star)$ moet per definitie gelden: $q^1_\star = R^1(q^2_\star)$ en $q^2_\star = R^2(q^1_\star)$. Oplossing van deze twee vergelijkingen levert voor het cournot-evenwicht $q^1_\star = q^2_\star = \frac{1}{3}(b - 4\frac{1}{2}\cdot a)$. De prijs in het cournot-evenwicht is dan $p_\star = \frac{b-(q^1_\star+q^2_\star)}{a} = \frac{b+9a}{3a}$.
b. Dat is zo omdat geen der spelers een dominante strategie heeft (zoals de vorm van de reactiefuncties aantoont).

Oplossing 9 a. $(360, 0)$ voor speler 1 en $(0, 360)$ voor speler 2.
b. $\pi^1 = 14400, \pi^2 = 14400$.
c. Voor $(q^1, q^2) = (180, 180)$ geldt $\breve{\Pi}^1(q^1, q^2) = 16200 > \pi^1$ en $\breve{\Pi}^2(q^1, q^2) = 16200 > \pi^2$.

Oplossing 10 Voor het cournot-duopolie geldt —— in het cournot-evenwicht dat $q^1 = q^2$ en dus dat $s^1 = s^2$. Daaruit volgt voor de totale hoeveelheid Q_d daar: $P = \frac{\mathcal{C}'}{1+s\cdot\epsilon_P}$. Voor de winstmaximaliserende hoeveelheid Q_m voor het monopolie geldt $P = \frac{\mathcal{C}'}{1+\cdot\epsilon_P}$. Omdat $1 + s\cdot\epsilon_P > 1 + s\cdot\epsilon_P$ volgt dat de cournot-evenwichtsprijs kleiner dan de monopolieprijs is, en dus de omgekeerde ordening voor de hoeveelheden.

Oplossing 11 ——————

a. Kartelevenwicht is $(\frac{1}{2}, 1)$, kartelevenwichtsprijs is $2\frac{1}{2}$, winst van producent 1 is $\frac{3}{4}$ en die van producent 2 is 2.

b. Alle (q^1, q^2) waarvoor $q^1 + q^2 = 360$.

c. $(0, 380)$.

Oplossing 12 a. $R^1(q^2) = 1200 - \frac{1}{2}q^2$ en $R^2(q^1) = 1200 - \frac{1}{2}q^1$ waaruit het cournot-evenwicht $(800, 800)$.

b. $q^1(1) = 700, q^2(1) = 1100, q^1(2) = 650, q^2(2) = 850, q^1(3) = 775, q^2(3) = 875, q^1(4) = 762,5, q^2(4) = 812,5, q^1(5) = 793,75, q^2(5) = 818,75$.

Oplossing 13 ———————

Oplossing 14 a. Met $\breve{\Pi}_2(q^1, q^2) = P(q^1 + q^2)q^2 - \mathcal{C}^2(q^2)$ volgt dat $\frac{\partial \breve{\Pi}^2}{\partial q^1} = P'(q^1 + q^2)q^2 < 0$, dus de winst van de volger is een dalende functie van de hoeveelheid q^1 die de leider op de markt brengt.

b. Duid met S Stackelberg-objecten en met C cournot-objecten aan. Stel $(q^{1,S}, q^{2,S})$ is een von-stackelberg-evenwicht en $(q^{1,C}, q^{2,C})$ is een cournot-evenwicht. Dan geldt: $\breve{\Pi}_{1,S}(q^{1,S}) \geq \breve{\Pi}_{1,S}(q^1)$ voor alle q^1 en $\breve{\Pi}_{1,C}(q^{1,C}, q^{2,C}) \geq \breve{\Pi}_{1,C}(q^1, q^{2,C})$ voor alle q^1. Omdat $R^2(q^{1,C}) = q^{2,C}$ volgt nu $\breve{\Pi}_{1,S}(q^{1,S}) \geq \breve{\Pi}_{1,S}(q^{1,C}) = P(q^{1,C} + R^2(q^{1,C}))q^{1,C} - C^1(q^{1,C}) = P(q^{1,C} + q^{2,C})q^{1,C} - C^1(q^{1,C}) = \breve{\Pi}_{1,C}(q^{1,C}, q^{2,C})$, zoals gewenst.

Oplossing 15 Volledige concurrentie: $p = 4, q = 48$, winst is —- .

Monopolie: $p = 52, q = 24$, winst is —–.

Cournot-duopolie: $p = 36, q = 32$, winst is —–.

Kartel: $p = 52, q = 24$, winst is —–.

Von-stackelberg-duopolie: $p = 28, q = 36$, winst is —-.

Oplossing 16 Beide verkopers: lage prijs.