Micro-economie

Fundamentele berekeningetjes

P. v. Mouche

Lente 2005

Motto:

"The time has come", the Walrus said,
"To talk of many things:
Of shoes - and ships - and sealing wax -
Of cabbages - and kings".

Voorwoord

Dit typoscript behandelt een deel van de rode draad van de neoklassieke micro-economie en wel dat deel dat samenhangt met het optimalisatieprincipe. De behandeling is elementair en mathematisch niet-rigoureus. Alhoewel het typoscript nagenoeg *self-contained* is, is het mooi meegenomen als men al eens kennis gemaakt heeft met de problemen in kwestie, al was het alleen maar op een niet-kwantitatieve manier.

Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot een verdere verbetering van het typoscript.

Tenslotte: dit typoscript is ook beschikbaar via het internet en wel op `home.deds.nl/~pvmouche/manus.html`.

Resumé van gebruikte economische notaties

- x_1 : hoeveelheid van goed 1,
  x_2 : hoeveelheid van goed 2,
  (x_1, x_2) : goederenbundel.
- k_1 : hoeveelheid van productiefactor 1,
  k_2 : hoeveelheid van productiefactor 2.
  (k_1, k_2) : productiefactorenbundel.
- p_1 : prijs van goed 1,
  p_2 : prijs van goed 2.
- w_1 : prijs van productiefactor 1,
  w_2 : prijs van productiefactor 2.
- $u(x_1, x_2)$: nutsfunctie.
- m : inkomen van consument,
  B : budget van producent.
- $f(x_1, x_2)$: productiefunctie.
- q : outputniveau.
- $c(q; w_1, w_2)$: lange termijn kostenfunctie.
- $P(q)$: inverse marktvraagfunctie.

1 Inleiding

Dit typoscript bevat behandelt de belangrijkste micro-economische extremalisatieproblemen op een elementaire formele kwantitatieve manier. Bij het oplossen van deze problemen is de Methode van Lagrange[1] van belang, waarvoor bij het genoten wiskunde-onderwijs geen tijd was om deze te behandelen.

Opgemerkt zij nog dat de extremalisatieproblemen die we bekijken continue variabelen behelzen. In veel elementaire leerboeken daarentegen worden extremalisatieproblemen met discrete variabelen, i.e. variabelen die alleen geheeltallige waarden kunnen aannemen. Maar het kwantitatiever maken van dit soort problemen is veel moeilijker dan van de continue variant die we hier bekijken.

Het typoscript bedient zich van twee talen: de Nederlandse en de wiskundige. De gebezigde Nederlandse taal is hard (i.e. fautloos), maar de gebezigde wiskundige is soft, dat is niet-mathematisch rigoureus (en zonder bewijzen).

De organisatie van het typoscript is als volgt. In § 2 geven we praktische recepten voor twee wiskundige extremalisatieproblemen; in het bijzonder komt daarbij de Methode van Lagrange ter sprake. Vervolgens komen vijf fundamentele economische extremalisatieproblemen aan de orde: nutsmaximalisatie, kostenminimalisatie, productiemaximalisatie, winstmaximalisatie (inputperspectief) en winstmaximalisatie (outputperspectief). De eerste drie betreffen een extremalisatieprobleem met restricties en de laatste twee problemen zonder restricties. De in § 2 gegeven recepten induceren recepten voor deze vijf problemen. In § 4 kijken we verder dan onze neus lang is en tenslotte volgen in § 5 opgaven.

Wat wiskundige voorkennis betreft, gaat de auteur ervan uit dat men vergelijkingen kan oplossen en dat men kan (partieel) differentiëren.

2 Praktische recepten voor een tweetal wiskundige extremalisatieproblemen

In neoklassieke micro-economische modellen maakt men gebruik van twee fundamentele principes om voorspellingen te doen over de allocatie die tot stand komt, te weten het *optimaliseringsprincipe* en het *evenwichtsprincipe*.[2] Dat optimaliseren houdt, gegeven prijzen, nutsmaximalisatie voor de consumenten en winstmaximalisatie voor de producenten in. En om de prijzen te verklaren kijkt men naar situaties van evenwichten, i.e. waar vraag gelijk aan aanbod is.

In het onderstaande worden twee typen van optimaliseringsproblemen tezamen met hun recepten gegeven. Deze beheersende kan men al heel wat problemen aanpakken.

Terminologie: Beschouw een functie g die we we willen optimaliseren (i.e. maximaliseren óf minimaliseren). Een element uit het domein van g die dit bewerkstelligt heet *optimaliseerder* (*maximalixeerder*, *minimaliseeder*).

2.1 Geen restricties

Beschouw een functie van m variabelen $g(a_1, \ldots, a_m)$ die we willen optimaliseren. Als alles even meezit, is er een unieke maximaliseerder en is een mogelijk recept waarmee deze te vinden is:

Recept 1 *Los op:* $\frac{\partial g}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial g}{\partial a_n} = 0$.

Dus volgens het recept moeten e alle partiële afgeleiden van g gelijk aan 0 stellen. Het gaat hier dan om n vergelijkingen in n onbekenden (de $x_1, \ldots, x_n$). Als alles even meezit, is er een unieke oplossing en is dat de gezochte optimaliseerder.

Voorbeeld 1 $g(a_1, a_2) = -30a_1^2 + 50a_1a_2 - 50a_2^2 + 85a_1 + 195a_2 - 475$. Dan $\frac{\partial g}{\partial a_1} = -60a_1 + 50a_2 + 85$ en $\frac{\partial g}{\partial a_2} = 50a_1 - 100a_2 + 195$. Oplossen van $\frac{\partial g}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial a_2} = 0$ levert $a_1 = 5,21..$ en $a_2 = 4,56...$

[1] Louis Lagrange (1736-1813), wiskundige. Doceerde in Parijs, Turijn en Berlijn. Deed belangrijke ontdekkingen in vele takken van de wiskunde.

[2] Deze vormen samen de neoklassieke toverdoos.

2.2 Restricties

Beschouw een functie van m variabelen $g(a_1, \dots, a_m)$ die we willen optimaliseren onder een enkele restrictie van de vorm $h(a_1, \dots, a_m) = 0$. Een $(a_1, \dots, a_m)$ die dit bewerkstelligt heet weer *optimaliseerder*.

Als alles even meezit, is er een unieke optimaliseerder en is een mogelijk recept waarmee deze te vinden is:

Recept 2 *Men vorme de Lagrange-functie*

$$L(a_1, \dots, a_n) \;:=\; g(a_1, \dots, a_n) - \lambda h(a_1, \dots, a_n).$$

En men losse nu op: $h(a_1, \dots, a_n) = 0$ *en* $\frac{\partial L}{\partial a_1} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial a_n} = 0.$

Het gaat hier om $n + 1$ vergelijkingen in $n + 1$ onbekenden (de $x_1, \dots, x_n$ en de λ). Als alles even meezit, is er een unieke oplossing en verschaft deze de gezochte optimaliseerder.

Voorbeeld 2 $g(a_1, a_2) = a_1 a_2 + 7$ en $h(a_1, a_2) = 5a_1 + a_2 - 10$. Dan $L(a_1, a_2) = a_1 a_2 + 7 - \lambda(5a_1 + a_2 - 10)$. Dus $\frac{\partial L}{\partial a_1} = a_2 - 5\lambda$ en $\frac{\partial L}{\partial a_2} = a_1 - 5\lambda$. Oplossen van $\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial a_2} = 0, h(a_1, a_2) = 0$ geeft $a_1 = 1, a_2 = 5, \lambda = 1/5$.

Het gegeven recept staat bekend als de Methode van Lagrange is genoemd naar Joseph Louis Lagrange (1736-1813), een Frans wiskundige.

In het geval van $n = 2$, i.e. van een een extremalisatieprobleem in twee variabelen met één restrictie, is de Methode van Lagrange te omzeilen als men de ene variabele uit kan drukken in de andere, zodat er een functie van een variabele overblijft die men moet extremaliseren.

Voorbeeld 3 Uit een lat met lengte R zagen we 12 stukjes om een doos uit te timmeren: 4 met lengte R_1 voor de hoogte, 4 met lengte R_2 voor de breedte en 4 met lengte R_3 voor de diepte. de R_1, R_2, R_3 zodanig dat de inhoud van de doos maximaal is.

Toepassen van de methode van Lagrange met $h(R_1, R_2, R_3) := 4R_1 + 4R_2 + 4R_3 - R$ en $L(R_1, R_2, R_3) := R_1 R_2 R_3 - \lambda(4R_1 + 4R_2 + 4R_3 - R)$ levert $R_1 = R_2 = R_3 = R/12$, i.e. een kubus.

3 Een vijftal economische extremalisatieproblemen

3.1 Nutsmaximalisatie

Onder een *goederenbundel* verstaan we een vector (x_1, x_2). Hierbij duidt x_1 de hoeveelheid van goedtype i aan.

Het nutsmaximalisatieprobleem luidt:

> Gegeven een nutsfunctie $u(x_1, x_2)$, prijs p_1 van goed 1, prijs p_2 van goed 2 en een inkomen m, bepaal de nutsmaximaliserende koopbare goederenbundels.

De Methode van Lagrange leidt tot het volgende recept voor het nutsmaximalisatieprobleem (ga dat na!):

Recept 3 (Recept voor nutsmaximalisatie.)

Men losse de volgende twee vergelijkingen op:

$$\frac{p_1}{p_2} \;=\; \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}},$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \;=\; m.$$

De tweede vergelijking in dit recept is de budgetrestrictie en is niet verbazingwekkend. De eerste vergelijking is echter diepzinniger en staat ook wel bekend als de *Tweede wet van Gossen*.[3] De term $\frac{\partial u}{\partial x_1} / \frac{\partial u}{\partial x_2}$ is een formule voor de marginale substitutieverhouding tussen goed 1 en 2.

Voorbeeld 4 $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2, p_1 = 1, p_2 = 2, m = 11$. Het bovenstaande recept geeft $1/2 = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}}{1}$ en $x_1 + 2x_2 = 11$. Oplossen van deze vergelijkingen geeft $x_1 = 1$ en $x_2 = 5$.

Men kan het nutsmaximalisatieprobleem analyseren voor willekeurige prijzen $p_1,\ p_2$ en budget m. In geval er voor elke p_1, p_2, m precies een nutsmaximaliserende goederenbundel bestaat, heten de optimale x_1 en x_2 dan nog *marshalliaanse vraagfuncties*. Deze zullen we aanduiden met $\tilde{x}_1$ en $\tilde{x}_2$. Verder heten de optimale x_1 en x_2 als functie van m *engel-krommen*.

Voorbeeld 5 In geval van de cobb-douglas-nutsfunctie $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ vindt men voor de marshalliaanse vraagfuncties[4]

$$\tilde{x}_1(p_1, p_2; m) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_1},$$
$$\tilde{x}_2(p_1, p_2; m) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_2}.$$

3.2 Kostenminimalisatie

Onder een *productiefactorenbundel* (ook wel *input* genoemd) verstaan we een vector (k_1, k_2). Hierbij duidt k_1 de hoeveelheid van productiefactortype i aan.

Het kostenminimalisatieprobleem luidt:

> Gegeven een productiefunctie $f(k_1, k_2)$, prijs w_1 van productiefactor 1, prijs w_2 van productiefactor 2 en een output hoeveelheid q, bepaal de kostenminimaliserende tenminste die output opleverende productiefactorenbundels. (k_1, k_2).

Recept 2 leidt tot (ga weer zelf na!) het volgende recept voor het kostenminimalisatieprobleem:

Recept 4 (Recept voor kosteniminalisatie.)

Men losse de volgende twee vergelijkingen op:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial k_1}}{\frac{\partial f}{\partial k_2}},$$
$$f(k_1, k_2) = q.$$

De term $\frac{\partial f}{\partial k_1} / \frac{\partial f}{\partial k_2}$ is een formule voor de marginale technische substitutieverhouding tussen productiefactor 1 en 2. Ook het kostenminimalisatieprobleem kan men analyseren voor willekeurige "parameterwaarden", i.e. voor willekeurige prijzen $p_1,\ p_2$ en outputniveau q. In geval er voor elke p_1, p_2 en q precies een optimale goederenbundel (k_1, k_2) bestaat, dan heten de optimale k_1 en k_2 *conditionele productiefactor vraagfuncties* en de daarbij horende kosten de *(lange termijn) kostenfunctie*. Als $\tilde{k}_1$ en $\tilde{k}_2$ deze functies zijn, dan is $w_1\tilde{k}_1 + w_2\tilde{k}_2$ gelijk aan de totale kosten. Deze functie die men vaak met $c(q)$ aanduidt,[5] heet de *kostenfunctie*.

[3]Hermann Gossen (1810-1858), a]Gossen, Hermann Duitser en economist. Een wetenschapper die niet veel contact met zijn collega's had. Hij stond volledig achter wat men tegenwoordig "marktdenken" noemt en verwierp alles wat ook maar een beetje naar communisme of socialisme rook. Hij schreef één boek waarin hij beweerde dát te doen voor de economie wat Copernicus voor de astronomie gedaan had. Dat boek was nogal wiskundig van aard, zeker voor die tijd binnen de sociale wetenschappen. Het werd slecht ontvangen. Daarom liet hij alle boeken uit de handel nemen en vernietigen. Zijn werk raakte in de vergetelheid. Jevons a]Jevons, William (1835-1882) en Walrasa]Walras, Léon herontdekten hem. Hij is nu onder meer bekend om zijn twee wetten.

[4]Er zijn micro-economie-boeken waar de fundamentele extremalisatieproblemen alleen in de context van cd-functies behandeld worden. Dat kan de lezer in menig opzicht op het verkeerde been zetten, zoals het misverstand te denken dat de formules hier ook (op de een of andere manier) toepasbaar is voor allerlei andere nutsfuncties.

[5]Daarbij de w_1 en w_2 in de notatie onderdrukkend.

3.3 Productiemaximalisatie

Het productmaximalisatieprobleem luidt:

> Gegeven een productiefunctie $f(k_1, k_2)$, prijs p_1 van productiefactor 1, prijs p_2 van productiefactor 2 en een budget B, bepaal de koopbare productiefactorenbundels die de hoogst mogelijke output opleveren.

Recept 2 leidt tot het volgende recept voor het productiemaximalisatieprobleem:

Recept 5 (Recept voor productiemaximalisatie.)

Men losse de volgende twee vergelijkingen op:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial k_1}}{\frac{\partial f}{\partial k_2}},$$

$$w_1k_1 + w_2k_2 = B.$$

Voorbeeld 6 Dit recept toegepast op $f(k_1, k_2) = k_1^{1/3}k_2^{2/3},\ w_1 = 1,\ w_2 = 2,\ B = 50$ geeft als optimale productiefactorenbundel $k_1 = 50/3,\ k_2 = 50/3$. En voor willekeurige productiefactorprijzen en budget vinden we $k_1 = \frac{B}{3w_1},\ k_2 = \frac{2B}{3w_2}$.

Het is nog aardig op te merken dat het productiemaximalisatieprobleem mathematisch equivalent is aan het nutsmaximalisatieprobleem.

3.4 Winstmaximalisatie (inputperspectief)

De inputperspectiefvariant van het winstmaximalisatieprobleem (in geval van een constante inverse marktvraagfunctie) luidt:

> Gegeven een outputprijs p, productiefunctie $f(k_1, k_2)$, prijs w_1 van productiefactor 1, prijs w_2 van productiefactor 2, bepaal de hoeveelheid van de output die de winst $pf(k_1, k_2) - (w_1k_1 + w_2k_2)$ maximaliseert.

Recept 1 leidt tot het volgende recept.

Recept 6 (Recept voor winstmaximalisatie (inputperspectief).)

Men losse de volgende twee vergelijkingen op:

$$p\frac{\partial f}{\partial k_1} = w_1, \quad p\frac{\partial f}{\partial k_2} = w_2.$$

Deze vergelijkingen heten ook wel *grensproductiviteitsvergelijkingen*.

Als we dit winstmaximalisatieprobleem analyseren voor willekeurige "parameterwaarden", $p,\ w_1,\ w_2$ dan leidt dit, als alles even meezit, tot de *productiefactor vraagfuncties* (die de winstmaximaliserende productiefactorhoeveelheden weergeven als functie van de parameters), en de *aanbodfunctie* (die de output in de winstmaximaliserende productiefactorhoeveelheden weergeven als functie van de parameters).

3.5 Winstmaximalisatie (outputperspectief)

Het winstmaximalisatieprobleem luidt:

> Gegeven een inverse marktvraagfunctie $P(q)$, kostenfunctie $c(q)$, bepaal de hoeveelheid van de output die de winst $P(q)q - c(q)$ maximaliseert.

Recept 1 leidt tot het volgende recept.

Recept 7 (Recept voor winstmaximalisatie (outputperspectief).)

Men losse de volgende vergelijking op

$$P'(q)q + P(q) - c'(q) = 0.$$

Een belangrijk geval is waar de inverse marktvraagfunctie P constant is, zeg $P(q) = p$ (dat is het geval als men met een competitieve producent te maken heeft). Bovenstaande vereenvoudigt dan, omdat $P'(q) = 0$, tot het volgende recept dat ook wel bekend staat als de *Prijs-is-marginale-kosten-regel*:

Recept 8

Men losse de volgende vergelijking op

$$P(q) = c'(q).$$

4 Epiloog

Hierboven bekeken we steeds slechts de situatie van 2 goederen en 2 productiefactoren. Het is niet moeilijk om alles "op te krikken" naar meerdere goederen en productiefactoren. Eventueel kan men bij het nutsmaximalisatieprobleem ook nog de grootte van het nut in het nutsmaximalisatieprobleem bepalen. Bij het productiemaximalisatieprobleem zou men ook nog de grootte van hoogst mogelijke output kunnen bepalen. Bij het winstmaximalisatieprobleem zou men ook nog de productiefactorhoeveelheden kunnen bepalen die de winst maximaliseren. De bepaling van al dit soort van objecten is gebruikelijk in zogenaamde dualiteitstheoretische benaderingen. (Dualiteitstheorie is een benaming voor "geavanceerde vraag- en aanbodtheorie".)

Wiskundig is er van van alles mis aan bovenstaande presentatie. De gegeven recepten ter oplossing van de extremalisatieproblemen werken slechts in situaties waar geen dingen aan de hand zijn die roet in het eten gooien. Vandaar ook dat de auteur hen met "soft" betitel.[6] Qua roet kan men denken aan:

1. Het toegepaste principe "n vergelijkingen in n onbekenden hebben een (unieke) oplossing" hoeft lang niet altijd op te gaan. Dit principe noemt de auteur de "nn1-regel".

2. Functies zijn niet (partieel) differentieerbaar. Denk aan de nutsfunctie en indifferentiekrommen van perfecte complementen of aan de productiefunctie en isoquanten van de leontief-technologie.

3. Men vindt een minimum in plaats van het gewenste maximum (of omgekeerd). Dat komt omdat de twee oplossingsmethoden eigenlijk slechts eerste orde condities behelzen. Dit verschijnsel wordt nogal eens veroorzaakt als niet aan bepaalde convexiteit en concaviteit voorwaarden voldaan is.

4. Men vindt negatieve waarden, terwijl slechts niet-negatieve toegestaan zijn. Dat verschijnsel treedt onder meer op bij zogenaamde quasi-lineaire nutsfuncties, zoals $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ voor kleine inkomens. De wiskundige kortzichtigheid bestaat er dan in dat men niet expliciet rekening houdt met het niet-negatief zijn van de x_1, x_2, k_1, k_2. De Methode van Lagrange doet dat inderdaad niet, die van Kuhn-Tucker zou het wel doen.

5 Opgaven

Opgave 1 *Gegeven de nutsfunctie $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$. Dan geldt voor de marginale substitutieverhouding in de goederenbundel.*

A. Deze is in elke goederenbundel dezelfde.

B. In $(1, 4)$ is ze $1/2$.

[6] Natuurlijk zijn er ook "harde recepten", maar om met deze te kunnen omgaan moet men zijn wiskunde redelijk beheersen.

C. *In* $(1,1)$ *is ze* 3.

D. *Deze is een stijgende functie van* x_2.

Opgave 2 *Gegeven de cobb-douglas nutsfunctie* $u(x_1,x_2) = Ax_1^a x_2^b$. *De marginale substitutieverhouding in de goederenbundel* (x_1,x_2) *voldoet aan.*

A. *Deze is* 0.

B. *In* $(1,1)$ *is ze* $a+b$.

C. *Deze is niet gedefinieerd indien* $x_2 = 0$.

D. *Deze is gelijk aan* $\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}$.

Opgave 3 *De nutsmaximaliserende goederenbundel* (x_1,x_2) *voor het nutsmaximalisatieprobleem voor*

$$u(x_1,x_2) = x_1^{1/3}x_2^{2/3},\ p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ m = 200$$

voldoet aan

A. $(x_1,x_2) = (\frac{200}{3}, \frac{200}{3})$.

B. $(x_1,x_2) = (50,50)$.

C. $(x_1,x_2) = (0,100)$.

D. $(x_1,x_2) = (200,0)$.

Opgave 4 *De nutsmaximaliserende goederenbundel* (x_1,x_2) *voor het nutsmaximalisatieprobleem voor*

$$u(x_1,x_2) = x_1^{1/6}x_2^{2/3},\ p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ m = 100$$

voldoet aan:

A. $x_1 = 100/6,\ x_2 = 125/3$.

B. $x_1 = 50,\ x_2 = 15$.

C. $x_1 = 20,\ x_2 = 40$.

D. $x_1 = 10,\ x_2 = 45$.

Opgave 5 *De nutsmaximaliserende goederenbundel* (x_1,x_2) *voor nutsmaximalisatieprobleem voor*

$$u(x_1,x_2) = bx_1^a x_2^{1-a} + c, p_1,\ p_2,\ m \textit{ willekeurig}$$

wordt gegeven door:

A. $x_1 = \frac{a}{1-a}\frac{m}{p_1},\ x_2 = \frac{m}{p_2}$.

B. $x_1 = (1-a)\frac{m}{p_1},\ x_2 = a\frac{m}{p_2}$.

C. $x_1 = a\frac{m}{p_1},\ x_2 = (1-a)\frac{m}{p_2}$.

D. $x_1 = b\frac{m}{p_2},\ x_2 = (1-b)\frac{m}{p_1}$.

Opgave 6 *De nutsmaximaliserende goederenbundel voor het nutsmaximalisatieprobleem voor*

$$u(x_1,x_2) = x_1 + \sqrt{x_2},\ p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ m = 40$$

A. *is* $(\frac{119}{6}, \frac{1}{9})$.

B. *is* $(20, 40/3)$.

C. *is* $10, 20/3)$.

D. *is* $(20, 0)$.

Opgave 7 *De nutsmaximaliserende goederenbundel* (x_1, x_2, x_3) *voor nutsmaximalisatieprobleem*

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3,\ p_1 = p_2 = p_3 = 4,\ m = 1000$$

voldoet aan

A. $(x_1, x_2, x_3) = (250/3, 250/3, 250/3)$.

B. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

C. $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$.

D. $x_1 > x_2 > x_3$.

Opgave 8 *De nutsmaximaliserende goederenbundel voor het nutsmaximaliatieprobleem voor*

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\ p_1 = 4, p_2 = 2,\ m = 40,$$

A. *is* $(10, 0)$.

B. *is* $(0, 20)$.

C. *is* $(5, 10)$.

D. *is* $(0, 0)$.

Opgave 9 *Gegeven de productiefunctie* $f(k_1, k_2) = ak_1^{\beta_1} k_2^{\beta_2} + b$. *De marginale technische substitutiev-erhouding in de productiefactorbundel* (k_1, k_2) *voldoet aan.*

A. *Deze is* b.

B. *In* $(1, 1)$ *is ze* $a + b$.

C. *Deze* $\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{k_2}{k_1}$.

D. *Deze is gelijk aan* k_1/k_2.

Opgave 10 *De kostenminimaliserende productiefactorenbundel voor het kostenminimalisatieprobleem*

$$f(k_1, k_2) = 3k_1^{1/3} k_2^{2/3},\ w_1 = 2,\ w_2 = 4,\ q = 100$$

voldoet aan:

A. $k_1 = 50,\ k_2 = 50$.

B. $k_1 \geq 75,\ k_2 \leq 50$.

C. $k_1 = 100,\ k_2 = 100$.

D. $k_1 \cdot k_2 = 100$.

Opgave 11 *De kostenminimaliserende productiefatorenbundel voor het kostenminimalisatieprobleem*

$$f(k_1, k_2) = k_1 k_2 \text{ en } w_1,\ w_2,\ q \text{ willekeurig}$$

is gelijk aan:

A. $k_1 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}\sqrt{q},\ k_2 = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\sqrt{q}$.

B. $k_1 = \frac{w_2}{w_1}\sqrt{q},\ k_2 = \frac{w_1}{w_2}\sqrt{q}$.

C. $k_1 = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\sqrt{q},\ k_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}\sqrt{q}$.

D. $k_1 = k_2 = q$.

Opgave 12 *De kostenfunctie bij de productiefunctie*

$$f(k_1, k_2) = k_1^{1/3} k_2^{2/3}$$

is in het geval $w_1 = 1, w_2 = 2$ *gelijk aan:*

A. $c(q) = q$.

B. $c(q) = \sqrt{q}$.

C. $c(q) = 3q$.

D. $c(q) = q^2 + 3$.

Opgave 13 *De wintmaximaliserende output* q *voor het winstmaximalisatieprobleem met*

$$f(k_1, k_2) = k_1^{1/3} k_2^{2/3},\ w_1 = 1,\ w_2 = 2,\ P(q) = 10 - q$$

voldoet aan:

A. $q > 5$.

B. $q = 5$.

C. $0 < q < 5$.

D. $q = 0$.

Opgave 14 *A. Een marshalliaanse vraagfunctie bevat normaliter minder informatie dan een engel-kromme.*

B. Een marshalliaanse vraagfunctie bevat normaliter meer informatie dan een engel-kromme.

C. Een marshalliaanse vraagfunctie bevat altijd even veel informatie dan een engel-kromme.

D. De noties van marshalliaanse vraagfunctie en engel-kromme hebben niks met elkaar te maken.

Opgave 15 *De prijselasticiteit van de vraag voor de vraagfunctie* $q(p) = p^a$, *waar* $a < 0$, *voldoet aan*

A. Deze is gelijk aan -1.

B. Deze is afhankelijk van p.

C. Deze is gelijk aan a.

D. Deze is elastisch.

Opgave 16 *De prijselasticiteit van de vraag voor de vraagfunctie* $q(p) = 10p - 5$

A. is gelijk aan -1.

B. is gelijk aan 10.

C. is gelijk aan -10.

D. is afhankelijk van p.

Beknopte antwoorden.

Oplossing 1 B.

Oplossing 2 D.

Oplossing 3 A.

Oplossing 4 C.

Oplossing 5 C.

Oplossing 6 A.

Oplossing 7 A.

Oplossing 8 A.

Oplossing 9 C.

Oplossing 10 C.

Oplossing 11 C.

Oplossing 12 C.

Oplossing 13 C.

Oplossing 14 B.

Oplossing 15 C.

Oplossing 16 D.