Darbouxfuncties

Pierre v. Mouche

2012

Verbeterde versie 1.3 (september 2017)

Voorwoord

Dit typoscriptje gaat over darbouxfuncties en is omlaag te laden op `http://home.deds.nl/~pvmouche` (indien die url nog geldt).[1]

De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor discussies over het onderwerp der darbouxfuncties en houdt zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

[1]Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Notie

In het hele typoscript is I een eigenlijk interval van $\mathbb{R}$. !

Definitie 1 Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet een *darbouxfunctie* als voor elk interval J van $\mathbb{R}$ met $J \subseteq I$ de verzameling $f(J)$ een interval is. $\diamond$

Merk op dat $f : I \to \mathbb{R}$ een darbouxfunctie is dan en slechts dan f de Tussenwaarde Eigenschap heeft, i.e. als voor alle $x_1, x_2 \in I$ en $y \in \mathbb{R}$ met $\min(f(x_1), f(x_2)) < y < \max(f(x_1), f(x_2))$ er een $x_3 \in \,]x_1, x_2[\,$ bestaat met $f(x_3) = y$.

2 Continue functies

Stelling 1 *Als $f : I \to \mathbb{R}$ continu is, dan is f een darbouxfunctie.* $\diamond$

Bewijs.— Omdat f continu is, heeft (zoals welbekend) f de Tussenwaarde Eigneschap en is f dus een darbouxfunctie.[2] Q.e.d.

Het volgende resultaat is op zich interessant en zal zo van pas komen.

Propositie 1 *Voor $f : I \to \mathbb{R}$ zijn equivalent:*

a. f is continu en injectief;

b. f is strikt monotoon en $f(I)$ is een interval. $\diamond$

Bewijs.— "$b \Rightarrow a$": zonder beperking der algemeenheid mogen we veronderstellen dat f strikt stijgend is. Natuurlijk is f nu injectief. Uit het ongerijmde bewijzen we nu dat f niet continu is. Stel dus er is $a \in I$ waarin f discontinu is. We bekijken het geval waar $a \in \mathrm{Int}(I)$; als $a \notin \mathrm{Int}(I)$ gaat het bewijs analoog. Nu is $\lim_{x \downarrow a} f(x) \neq f(a)$ of $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq f(a)$. In het eerste geval is $\lim_{x \downarrow a} f(x) < f(a)$ en in het tweede is $\lim_{x \uparrow a} f(x) > f(a)$. In beide gevallen volgt er een tegenspraak met het een interval zijn van $f(I)$.

"$a \Rightarrow b$": omdat (volgens Stelling 1) een continue functie een darbouxfunctie is, is $f(I)$ een interval. Zij $T := \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$. T is convex. Definieer $\delta : T \to \mathbb{R}$ door

$$\delta(x, y) := f(y) - f(x).$$

De functie δ is continu. Dit implcieert dat $\delta(T)$ een interval is. Omdat f injectief is, volgt $0 \notin \delta(T)$. Dus $\delta(T) \subseteq \,]0, \infty[\,$ of $\delta(T) \in \,]-\infty, 0[$. Dit impliceert f is strikt stijgend respectievelijk f is strikt dalend. Q.e.d.

---

[2]Dit resultaat berust op het feit dat $\mathbb{R}$ volledig is.

3 Continue functies versus darbouxfuncties

Een darbouxfunctie hoeft niet continu te zijn: in geval $I = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sin(1/x)$ ($x > 0$) en $f(0) = -7/8$ is f een darbouxfunctie die niet continu (in 0 is). (Er bestaan, en dat tussen twee haakjes, zelfs darbouxfuncties die nergens continu zijn.)

Stelling 2 *1. Elke monotone darbouxfunctie is continu.*

2. Elke injectieve darbouxfunctie is continu. $\diamond$

Bewijs.— 1. Uit het ongerijmde. Stel $f : I \to \mathbb{R}$ is een monotone darbouxfunctie en $a \in I$ met f niet continu te a. We veronderstellen verder dat a een inwendig punt van I is; voor de andere gevallen gaat het bewijs analoog. Omdat f monotoon is bestaan $w_- := \lim_{x\uparrow a} f(x)$, $w_+ := \lim_{x\downarrow a} f(x)$ en is $w_- \leq f(a) \leq w_+$. Omdat f te a discontinu is, is $w_- < f(a)$ of $w_+ < f(a)$. Dus $w_- < w_+$. Fixeer $y \in \,]w_-, w_+[$ met $y \neq f(a)$. Zij $\xi > 0$ zodanig dat $]a - \xi, a + \xi\,[\, \in I$. Nu is voor alle $x \in [a - \xi, a\,[$: $f(x) \leq w_- < y$ en voor alle $x \in \,]a, a + \xi]$: $f(x) \geq w_+ > y$. In het bijzonder $f(a - \xi) < y < f(a + \xi)$ en er is geen $x \in [a - \xi, a + \xi]$ met $f(x) = y$. Maar f is een darbouxfunctie. Tegenspraak.

2. Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Stelling 3 *Stel $f : I \to \mathbb{R}$ is een darbouxfunctie en f is in $a \in I$ discontinu.*

1. *Als $a \in \mathrm{Int}(I)$, dan bestaat $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ niet of bestaat $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ niet.*
2. *Als a een linker randpunt van I is, dan bestaat $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ niet.*
3. *Als a een rechter randpunt van I is, dan bestaat $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ niet.* $\diamond$

Bewijs.— We bewijzen 1 uit het ongerijmde; de bewijzen van 2 en 3 gaan analoog.

Stel dus f is in a discontinu en $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ bestaan. Omdat f in a discontinu is, volgt $\lim_{x\downarrow a} f(x) \neq f(a)$ of $\lim_{x\uparrow a} f(x) \neq f(a)$. Bekijk het geval waar

$$z := \lim_{x\uparrow a} f(x) < f(a);$$

de andere gevallen gaan net zo. Kies $\delta > 0$ zodanig dat

$$f([a - \delta, a\,[) \subseteq [z, \frac{z + f(a)}{2}].$$

Omdat

$$\frac{z + f(a)}{2} < \frac{3z + f(a)}{4}$$

volgt $\frac{3z+f(a)}{4} \notin f([a - \delta, a\,[)$. Omdat $f(a - \delta) < \frac{3z+f(a)}{4} < f(a)$ volgt dat f geen darbouxfunctie is. Tegenspraak. Q.e.d.

4 Afgeleiden zijn darbouxfuncties

De bijdrage van de heer Darboux was te laten zien dat er discontinue darbouxfuncties bestaan. Darboux zelf gaf het volgende voorbeeld: in geval $I = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ $(x > 0)$ en $f(0) = 0$ is f differentieerbaar en f' een darbouxfunctie die niet continu in 0 is. Immers: $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ als $x > 0$ en $f'(0) = 0$. Dat f' een darbouxfunctie is volgt ook uit:

Stelling 4 *(Darboux) Als $f : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is, dan is f' een darbouxfunctie.* $\diamond$

Bewijs.— Stel $x_1, x_2 \in I$ met $x_1 < x_2$ en $y \in \mathbb{R}$ met $\min(f'(x_1), f'(x_2)) < y < \max(f'(x_1), f'(x_2))$. Definieer $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ door

$$g(x) := f(x) - xy.$$

We zijn klaar als er een $x_3 \in \,]x_1, x_2[$ is met $g'(x_3) = 0$. We bewijzen dit nu op twee verschillende manieren.

Manier 1. Er geldt $f'(x_1) < y < f'(x_2)$ of $f'(x_2) < y < f'(x_1)$. Stel $f'(x_1) < y < f'(x_2)$; het andere geval gaat analoog. De functie g is continu en haar domein is compact en niet-leeg. De Stelling van Weierstrass impliceert dat g een minimaliseerder x_3 heeft. Omdat $g'(x_1) = f'(x_1) - y < 0$ en $g'(x_2) = f'(x_2) - y > 0$ volgt dat $x_3 \neq x_1$ en $x_3 \neq x_2$. Dus $x_3 \in \,]x_1, x_2[$ en de Stelling van Fermat impliceert daarom $g'(x_3) = 0$. Dus $f'(x_3) = y$.

Manier 2. Uit het ongerijmde. Stel $g'(x) \neq 0$ $(x_1 < x < x_2)$. De Stelling van Rolle impliceert dat g injectief is: inderdaad, anderzijds zijn er $\alpha, \beta \in [x_1, x_2]$ met $\alpha < \beta$ en $g(a) = g(b)$ en is er een $\gamma \in \,]\alpha, \beta[$ met $g'(\gamma) = 0$. De functie g is dus injectief en continu en, vanwege Propositie 1, strikt monotoon. Dus $g' \geq 0$ of $g' \leq 0$. Maar $g'(x_1)g'(x_2) = (f'(x_1) - y)(f'(x_2) - y) < 0$. Tegenspraak. Q.e.d.

Stelling 4 tesamen met Stelling 2 impliceert:

Corollarium 1 *Als $f : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is en f' monotoon is, dan is f continu differentieerbaar.* $\diamond$

Dit corollarium op haar beurt impliceert dat elke differentieerbare convexe functie continu differentieerbaar is .

5 Verdere eigenschappen

Natuurlijk: als $f : I \to \mathbb{R}$ een darbouxfunctie is, dan is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de functie λf dat ook. De som van twee darbouxfuncties $f, g : I \to \mathbb{R}$ is niet per se een darbouxfunctie: $I = \mathbb{R}_+$, $f(x) := \sin(1/x)(x \neq 0)$, $f(0) := 0$ en $g(x) := -\sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $g(0) := 1$.

Propositie 2 1. *Als een darbouxfunctie (strikt) dalend op het inwendige van haar domein is, dan is die functie (strikt) dalend.*

2. *Als een darbouxfunctie (strikt) stijgend op het inwendige van haar domein is, dan is die functie (strikt) stijgend.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel $I = [a, b]$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is een darbouxfunctie die op $]a, b[$ dalend is; andere gevallen gaan analoog. We bewijzen uit het ongerijmde dat f dalend is.

Stel f is niet dalend. Dan zijn er $x, y \in [a, b]$ met $x < y$ en $f(x) < f(y)$. Omdat f op $]a, b[$ dalend is moet $x = a$ of $y = b$.

Geval $y = b$. Dan $f(x) < f(b)$. Omdat f dalend is op $]a, b[$ volgt $f(y) \leq f(x) < f(b)$ $(x < y < b)$. Maar dit is in tegenspraak met het feit dat $f \restriction [x, b]$ een darbouxfunctie is.

Hier is nog een bewijs in geval f op $]a, b[$ strikt dalend is. Uit het boven bewezene volgt dat f dalend is. Omdat f op het inwendige van haar domein strikt dalend is, volgt dat f strikt dalend is.

2. Uit deel 1 door f te vervangen door $-f$. Q.e.d.

Als I compact is en $f : I \to \mathbb{R}$ continu is, dan weten we dat $f(I)$ begrensd en gesloten is. Voor een darbouxfunctie hoeft dat niet meer te gelden, zoals men snel ziet aan de afgeleide van de (differentieerbare) functie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$.

Het product van twee darbouxfuncties hoeft geen darbouxfunctie te zijn. Zelfs: als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een darbouxfunctie is, dan hoeft $g \cdot \mathrm{Id}$ geen darbouxfunctie te zijn. Om dat laatste in te zien, nemen we een functie f met de eigenschap dat $f([a, b]) = \mathbb{R}$ voor alle $a < b$. (Zo'n functie bestaat!) Definieer nu de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = 0$ als $f(x) = 1/x$ en $g(x) = f(x)$ als $f(x) \neq 1/x$; i.h.b. $g(0) = f(0)$. Dan is g een darbouxfunctie omdat $g([a, b]) = \mathbb{R}$ voor alle $a < b$.[3] Bekijken we nu de functie $h = g \cdot \mathrm{Id}$. We hebben $h(0) = 0$. Er is een $y \in [135, 137]$ met $g(y) = 107$. Dus $h(y) = g(y)y > 100$. Omdat h de de waarde 1 niet aanneemt(immers $h(y) = 1$ impliceert $g(y) = 1/y$, dus $f(y) = 1/y$ en vandaar $g(y) = 0$) is h geen darbouxfunctie.

[3] Inderdaad: fixeer $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $z \in \mathbb{R}$. Zij $c \in]a, b[$ zodanig dat $z = f(c)$. Dan is $g(c) = z$ of $z = 1/c$. Als $z = 1/c$, dan is er een q met $z = f(q)$ en $a < q < c$. Omdat $f(q) \neq 1/q$ is $g(q) = f(q) = z$.