

# Boven- en benedenlimieten

© P. H. M. v. Mouche

2012

Verbeterde versie 1.393

(juni 2018)

## Voorwoord

Dit typoscript over over beneden- en bovenlimieten voor rijen en functies is omlaag te laden op <http://pvmouche.deds.nl> (indien die url nog bestaat).<sup>1</sup> Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakter getuigen als daarbij © gerespecteerd wordt.

Enige voorkennis is vereist; enkele belangrijke eigenschappen van  $\mathbb{R}$  laten we de revue passeren. Als toepassing worden dini-afgeleiden behandeld.

Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Reële getallen</b>	<b>2</b>
1.1	Volledigheid . . . . .	2
1.2	Uitgebreide stelsel der reële getallen . . . . .	3
1.3	Limietpunt van een rij uit $\mathbb{R}$ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Supremum en infimum</b>	<b>3</b>
2.1	Geval van een partieel geordende verzameling . . . . .	3
2.2	Geval van $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	5
2.3	Infimum en supremum van reëelwaardige functies . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Boven- en benedenlimitieten</b>	<b>6</b>
3.1	Voor rijen uit $\mathbb{R}$ . . . . .	6
3.2	Voor rijen uit een volledig tralie . . . . .	8
3.3	Voor functies . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Dini-afgeleiden</b>	<b>10</b>

---

<sup>1</sup>Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

# 1 Reële getallen

In deze paragraaf laten we enkele belangrijke eigenschappen van het “systeem”  $\mathbb{R}$  van de reële getallen de revue passeren.

## 1.1 Volledigheid

Formeel gezien is een “systeem” van reële getallen een volledig geordend lichaam. Men kan laten zien dat zo’n systeem bestaat en (essentieel) eenduidig is. Er zijn diverse constructies van zo’n systeem mogelijk. Wij gaan uit van de constructie waar elke cauchy-rij uit  $\mathbb{R}$  een limiet heeft, i.e. convergent is.<sup>2</sup> Anders gezegd:  $\mathbb{R}$  is volledig. Dit impliceert het volgende fundamentele resultaat:

**Stelling 1** *Iedere begrensde monotone rij uit  $\mathbb{R}$  is een cauchy-rij en is dus convergent.*  $\diamond$

*Bewijs.* — We mogen veronderstellen dat de rij stijgend is. We bewijzen de bewering nu uit het ongerijmde.

Stel dus er is een begrensde stijgende rij  $(a_n)$  uit  $\mathbb{R}$  die geen cauchy-rij is. Dat betekent dat er een  $\epsilon > 0$  is zo dat voor alle  $N > 0$  er  $n, m \geq N$  zijn met  $|a_n - a_m| > \epsilon$ . Fixeer  $X \in \mathbb{R}$  met  $a_n < X$  voor alle  $n$ . Kies een  $N_1$  en  $n_1 > m_1 > N_1$  zodanig dat  $a_{n_1} - a_{m_1} > \epsilon$ . Kies een  $N_2 > n_1$  en  $n_2 > m_2 > N_2$  zodanig dat  $a_{n_2} - a_{m_2} > \epsilon$ . Enzovoorts. We krijgen zo:  $a_{m_1} < a_{n_1} \leq a_{m_2} < a_{n_2} < \dots$  met de eigenschap dat  $a_{n_k} - a_{m_k} > \epsilon$  voor alle  $k$ . Dit impliceert  $a_{n_k} - a_{m_1} > X - a_0$  voor  $k$  groot genoeg. Echter voor zulke  $k$  is  $a_{n_k} < X$  en  $a_0 \leq a_{m_1}$ . Conflict. Q.e.d.

De stelling impliceert dus in het bijzonder dat elke stijgende naar boven begrensde rij uit  $\mathbb{R}$  begrensd is. Een ander nuttig fundamenteel resultaat, dat niets met de volledigheid van  $\mathbb{R}$  te schaften heeft, is:

**Stelling 2** *Elke rij uit  $\mathbb{R}$  heeft een monotone deelrij.*  $\diamond$

*Bewijs.* — Zij  $(a_n)$  een rij. We noemen een natuurlijk getal  $n$  een lichtpunt als  $a_k < a_n$  voor alle  $k > n$ .<sup>3</sup> We onderscheiden twee gevallen.

1. Er zijn oneindig veel lichtpunten. Deze kunnen worden gerangschikt in een strikt stijgende rij  $n_0, n_1, \dots$ . Nu is  $a_{n_0}, a_{n_1}, \dots$  een (strikt) dalende deelrij van  $(a_n)$ .
2. Er zijn slechts eindig veel lichtpunten. Dan is er een natuurlijk getal  $N$  zodanig dat voor alle  $n \geq N$  geldt dat  $n$  geen lichtpunt is. Voor alle  $n \geq N$  bestaat er dus  $n' > n$  met  $a_{n'} \geq a_n$ . We kunnen nu inductief een stijgende deelrij van  $(a_n)$  construeren. Q.e.d.

Combinatie van de vorige twee stellingen levert:

**Corollarium 1** *(Bolzano-Weierstrass.) Elke begrensde rij uit  $\mathbb{R}$  heeft een convergente deelrij.*  $\diamond$

Een variant van dit resultaat is:

**Stelling 3** *Elke begrensde oneindige deelverzameling  $A$  van  $\mathbb{R}$  heeft een verdichtingspunt. I.e. er is een  $a \in \mathbb{R}$  zodanig dat voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $x \in A \setminus \{a\}$  is met  $|x - a| < \epsilon$ .*

*Bewijs.* — Fixeer een rij  $(b_n)$  uit  $A$  waarvan alle elementen verschillend zijn. Deze rij is begrensd. Volgens Bolzano-Weierstrass heeft deze rij een convergente deelrij, zeg  $a_n$ , met limiet, zeg  $a$ . Zij nu  $\epsilon > 0$ . Er bestaat een natuurlijk getal  $N$  zodanig dat  $|a_n - a| < \epsilon$  voor alle  $n \geq N$ . Omdat alle elementen van de rij  $a_n$  verschillend zijn, bestaat er een  $n_0 \geq N$  met  $a_{n_0} \in A \setminus \{a\}$  en  $|a_{n_0} - a| < \epsilon$ .

<sup>2</sup>Een andere manier is met behulp van Dedekind-snedes en nog een andere via decimale ontwikkelingen.

<sup>3</sup>Motivatie van deze terminologie: breidt de grafiek van de functie  $n \mapsto a_n$  door lineaire interpolatie uit tot een “berglandschap” en we stellen ons voor dat de zon zich rechts aan de horizon bevindt.

## 1.2 Uitgebreide stelsel der reële getallen

Het uitgebreide stelsel der reële getallen  $\overline{\mathbb{R}}$  krijgen we door aan de verzameling der reële getallen  $\mathbb{R}$  de symbolen  $-\infty$  en  $+\infty$  toe te voegen. Dus

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

De totale ordeningsrelatie  $\leq$  van  $\mathbb{R}$  breiden we als volgt uit tot een totale ordeningsrelatie van  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad (x \in \overline{\mathbb{R}}).$$

In plaats van  $\overline{\mathbb{R}}$  gebruikt men ook wel de intervalnotatie  $[-\infty, +\infty]$ .

Verder introduceren we de rekenregels

$$\begin{aligned}x + \infty &= \infty + x = +\infty \quad (x \neq -\infty); \\x + -\infty &= -\infty + x = -\infty \quad (x \neq +\infty); \\0 \cdot +\infty &= +\infty \cdot 0 = 0 \cdot -\infty = -\infty \cdot 0 = 0; \\x \cdot +\infty &= +\infty \cdot x = +\infty \quad (x > 0); \\x \cdot -\infty &= -\infty \cdot x = -\infty \quad (x > 0); \\x \cdot +\infty &= +\infty \cdot x = -\infty \quad (x < 0); \\x \cdot -\infty &= -\infty \cdot x = +\infty \quad (x < 0).\end{aligned}$$

We introduceren een metriek (en daarmee ook een topologie) in  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|,$$

waar  $\arctan(-\infty) = -\pi/2$  en  $\arctan(+\infty) = \pi/2$ .

## 1.3 Limietpunt van een rij uit $\mathbb{R}$

Als  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$  is, dan heet  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  een limietpunt van  $(a_n)$  als er een deelrij van  $(a_n)$  bestaat met limiet  $x$ .

**Propositie 1** 1. De limiet van een convergente rij is het unieke limietpunt van die rij.

2. Elke rij van reële getallen heeft een limietpunt.  $\diamond$

*Bewijs.* — 1. Zij  $a$  de limiet. Natuurlijk is  $a$  een limietpunt. Verder is  $a$  het enige limietpunt want elke deelrij heeft limiet  $a$ .

2. Als de rij begrensd is, dan heeft deze volgens de Stelling van Bolzano-Weierstrass een convergente deelrij en dus een limietpunt.

Als de rij naar boven onbegrensd is, dan is er een deelrij met limiet  $+\infty$  en als de rij naar beneden onbegrensd is, dan is een deelrij met limiet  $-\infty$ . Q.E.D.

## 2 Supremum en infimum

### 2.1 Geval van een partieel geordende verzameling

In deze paragraaf leggen we de notie van supremum en infimum uit in de context van een partieel geordende verzameling.<sup>4</sup> We beschouwen er verder steeds een partieel geordende verzameling, dat wil zeggen een 2-tuple  $(\mathcal{P}, \geq)$  waar  $\mathcal{P}$  een verzameling is en  $\geq$  een binaire relatie op  $\mathcal{P}$  is zó dat voor alle  $x, y, z \in \mathcal{P}$

$$x \geq x,$$

<sup>4</sup>Deze noties maken zelfs zin in de context van pré geordende verzamelingen.

$$(x \geq y \wedge y \geq z) \Rightarrow x \geq z,$$

$$(x \geq y \wedge y \geq x) \Rightarrow x = y.$$

Met  $\leq$  duiden we de duale relatie van  $\geq$  aan, dat wil zeggen  $x \leq y$  betekent  $y \geq x$ . Verder zijn de relaties  $>$  en  $<$  op  $\mathcal{P}$  gedefinieerd door

$$x > y \text{ als } x \geq y \text{ en } x \neq y,$$

$$x < y \text{ als } x \leq y \text{ en } x \neq y.$$

**Definitie 1** Een element  $y$  van  $\mathcal{P}$  heet een grootste element van  $\mathcal{P}$  als  $y \geq x$  voor alle  $x \in \mathcal{P}$ . Een element  $y$  van  $\mathcal{P}$  heet een kleinste element van  $\mathcal{P}$  als  $y \leq x$  voor alle  $x \in \mathcal{P}$ .  $\diamond$

**Definitie 2** Zij  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$ .

1.  $x \in \mathcal{P}$  heet een bovengrens (of majorant) van  $\mathcal{W}$  als  $w \leq x$  voor alle  $w \in \mathcal{W}$ . Als  $\mathcal{W}$  een bovengrens heeft, dan heet  $\mathcal{W}$  een naar boven begrensd deel van  $\mathcal{P}$ .
2.  $x \in \mathcal{P}$  heet een ondergrens (of minorant) van  $\mathcal{W}$  als  $x \leq w$  voor alle  $w \in \mathcal{W}$ . Als  $\mathcal{W}$  een ondergrens heeft, dan heet  $\mathcal{W}$  een naar onder begrensd deel van  $\mathcal{P}$ .
3.  $\mathcal{W}$  heet een begrensd deel van  $\mathcal{P}$  als  $\mathcal{W}$  zowel een naar boven als naar beneden begrensd deel van  $\mathcal{P}$  is.  $\diamond$

**Definitie 3** Zij  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$ .

- Een bovengrens  $x$  van  $\mathcal{W}$  heet een kleinste bovengrens van  $\mathcal{W}$  of het supremum van  $\mathcal{W}$ , notatie  $\sup_{\mathcal{P}}(\mathcal{W})$  of kortweg  $\sup(\mathcal{W})$ , als elke bovengrens  $x'$  van  $\mathcal{W}$  voldoet aan  $x \leq x'$ .<sup>5</sup>
- Een ondergrens  $x$  van  $\mathcal{W}$  heet een grootste ondergrens van  $\mathcal{W}$  of het infimum van  $\mathcal{W}$ , notatie  $\inf_{\mathcal{P}}(\mathcal{W})$  of kortweg  $\inf(\mathcal{W})$ , als elke ondergrens  $x'$  van  $\mathcal{W}$  voldoet aan  $x \geq x'$ .  $\diamond$

**Propositie 2** *Er bestaat hoogstens één grootste en hoogstens één kleinste element van  $\mathcal{P}$ . Elke  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$  heeft hoogstens één kleinste bovengrens en hoogstens één grootste ondergrens.*  $\diamond$

*Bewijs.* — Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Het is goed de volgende fijne opmerkingen te maken: allereerst, als  $\mathcal{P} = \emptyset$ , dan is  $(\mathcal{P}, \geq)$  een partieel geordende verzameling. Elke  $x \in \mathcal{P}$  is een bovengrens (en ondergrens) van  $\mathcal{W} = \emptyset$ , maar een kleinste bovengrens hoeft niet te bestaan. En: in geval  $\mathcal{P} = \emptyset$ , heeft de deelverzameling  $\mathcal{W} = \emptyset$  geen bovengrens (en dus ook geen kleinste bovengrens).

**Definitie 4**  $(\mathcal{P}, \geq)$  heet een tralie als elke tweetal elementen uit  $\mathcal{P}$  een supremum en een infimum heeft. In dat geval noteren we  $\sup(\{x, y\})$  ook wel met  $x \cup y$  en  $\inf(\{x, y\})$  ook wel met  $x \cap y$ .

**Definitie 5** Een tralie  $(\mathcal{P}, \geq)$  heet volledig als elke deelverzameling van  $\mathcal{P}$  een infimum en een supremum heeft.  $\diamond$

Dus: als  $(\mathcal{P}, \geq)$  een volledig tralie is, dan is  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ .

---

<sup>5</sup>Oftewel, een kleinste bovengrens van  $\mathcal{W}$  is niks anders dan een kleinste element van de verzameling der bovengrenzen van  $\mathcal{W}$ . Idem voor grootste ondergrens.

## 2.2 Geval van $\overline{\mathbb{R}}$

**Stelling 4** ( $\overline{\mathbb{R}}, \geq$ ) is een volledig tralie. In het bijzonder  $\sup(\emptyset) = -\infty$  en  $\inf(\emptyset) = +\infty$ .  $\diamond$

*Bewijs.*— We bewijzen dat  $V$  een kleinste bovengrens heeft en dat  $\sup(\emptyset) = -\infty$ ; de geldigheid van de andere beweringen volgt dan uit dit resultaat door met de verzameling  $-V = \{-x \mid x \in V\}$  aan de slag te gaan.

Als  $V = \emptyset$ , dan is elke  $M \in \mathbb{R}$  een bovengrens van  $V$ . Dit leidt tot  $\sup(\emptyset) = -\infty$ . Als  $V$  naar boven onbegrensd is, i.e. als er geen  $M \in \mathbb{R}$  is met  $x \leq M$  ( $x \in V$ ), dan zien we dat  $\sup(V) = +\infty$ .

Tenslotte veronderstel dat  $V$  niet-leeg en naar boven begrensd is. Met wat gepruts (dat we aan de lezer overlaten) kan men gebruik makend van de volledigheid van  $\mathbb{R}$  aantonen dat  $V$  een kleinste bovengrens heeft. Q.e.d.

We hebben al gezien:

$$\inf(\emptyset) = +\infty, \quad \sup(\emptyset) = -\infty.$$

En voor  $V, W \subseteq \mathbb{R}$  geldt (bewijzen worden aan de lezer overgelaten):

$$V \neq \emptyset \Rightarrow \inf(V) \leq \sup(V);$$

$$V \text{ naar boven begrensd} \Leftrightarrow \sup(V) < +\infty;$$

$$V \text{ naar beneden begrensd} \Leftrightarrow \inf(V) > -\infty;$$

$$\sup(-V) = -\inf(V);$$

$$\text{als } \lambda \in ]0, +\infty[, \text{ dan } \sup(\lambda V) = \lambda \sup(V) \text{ en } \inf(\lambda V) = \lambda \inf(V);$$

$$V \subseteq W \Rightarrow [\sup(V) \leq \sup(W) \text{ en } \inf(V) \geq \inf(W)];$$

$$V \leq W \Rightarrow [\sup(V) \leq \sup(W) \text{ en } \inf(V) \leq \inf(W)];$$

$$\sup(V \cup W) = \max(\sup(V), \sup(W)), \quad \inf(V \cup W) = \min(\inf(V), \inf(W));$$

$$\sup(\overline{V}) = \sup(V), \quad \inf(\overline{V}) = \inf(V);^6$$

als  $V \neq \emptyset$  en  $W \neq \emptyset$ , dan  $\sup(V + W) = \sup(V) + \sup(W)$  en  $\inf(V + W) = \inf(V) + \inf(W)$ .

Als  $I$  een indexverzameling is en  $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$  voor elke  $i \in I$ , dan schrijven we in plaats van  $\inf\{x_i \mid i \in I\}$  ook wel  $\inf_{i \in I} x_i$  en voor  $\sup\{x_i \mid i \in I\}$  ook wel  $\sup_{i \in I} x_i$ .

**Stelling 5** Zij  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$ . Als  $(a_n)$  stijgend is, dan geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$ . Als  $(a_n)$  dalend is, dan geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$ .  $\diamond$

*Bewijs.*— We bewijzen de eerste bewering; de tweede volgt daaruit meteen. We nemen aan dat  $(a_n)$  begrensd is; het geval dat  $(a_n)$  niet begrensd is, is een oefening voor de lezer. Zij  $(a_n)$  zo'n rij. Stelling 1 garandeert dat de rij convergeert, zeg naar  $a$ . We bewijzen nu dat  $\sup a_n = a$ . Wel, omdat de rij stijgend is volgt  $a_n \leq a$  voor alle  $n$ . Dus  $a$  is een bovengrens van de rij. En als  $b$  ook een bovengrens is, dan is  $a \leq b$  (want als  $b < a$  zou zijn, dan zou  $a_n \leq b < a$  hetgeen in tegenspraak met de convergentie van  $(a_n)$  naar  $a$  is). Q.e.d.

Als  $(a_n)$  en  $(b_n)$  rijen uit  $\mathbb{R}$  zijn, dan geldt

$$a_n \leq b_n \text{ voor allen} \Rightarrow [\sup_n a_n \leq \sup_n b_n \text{ en } \inf_n a_n \leq \inf_n b_n];$$

$$\sup_n (a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n, \quad \inf_n (a_n + b_n) \geq \inf_n a_n + \inf_n b_n.$$

---

<sup>6</sup> $\overline{V}$  is de topologische afsluiting van  $V$ .

## 2.3 Infimum en supremum van reëelwaardige functies

Zij  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  een functie; hier is  $A$  een verzameling. Dan definieert men

$$\sup f := \sup(f(A)), \quad \inf f := \inf(f(A)).$$

## 3 Boven- en benedenlimitieten

### 3.1 Voor rijen uit $\mathbb{R}$

Voor  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  hebben we gezien dat  $\sup(A)$  en  $\inf(A)$  wel-gedefinieerde elementen van  $\overline{\mathbb{R}}$  zijn.

Zij  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$ . Voor elk natuurlijk getal  $n (\geq 1)$  zij

$$s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$i_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Men definieert

**Definitie 6** Zij  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$ .

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k := \inf_n s_n \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k := \sup_n i_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$  heet ook wel de bovenlimiet van de rij  $(a_n)$  en  $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$  heet ook wel de benedenlimiet van de rij  $(a_n)$ .  $\diamond$

In plaats van  $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$  noteert men ook wel  $\overline{\lim} a_k$  en in plaats van  $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$  noteert men ook wel  $\underline{\lim} a_k$ .

In plaats van  $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$  en  $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$  zal ik hieronder ook wel kortweg respectievelijk

$$L, \quad l$$

schrijven.<sup>7</sup>

Vanwege de eenvoudige eigenschap

$$\overline{\lim}(-a_k) = -\underline{\lim} a_k$$

kunnen we resultaten voor  $\limsup$  snel omzetten in die voor  $\liminf$  (en omgekeerd).

Voor alle  $k, m$  geldt

$$s_k \geq a_k \geq i_k, \quad s_k \geq i_m,$$

(inderdaad:  $s_k \geq a_{k+m} \geq i_m$ ). Dat impliceert  $\inf_k s_k \geq i_l$  en daaruit  $\inf_k s_k \geq \sup_l i_l$ . Dus

$$\overline{\lim} a_k \geq \underline{\lim} a_k.$$

En zelfs

$$\sup_k a_k \geq \overline{\lim} a_k \geq \underline{\lim} a_k \geq \inf_k a_k.$$

Merk op dat de rij  $(s_n)$  dalend is en dat de rij  $(i_n)$  stijgend is; vandaar, voor alle  $n$ ,

$$L \leq s_n \text{ en } l \geq i_n.$$

Merk ook op dat  $\overline{\lim} a_k = +\infty$  dan en slechts dan als  $(a_n)$  naar boven onbegrensd is en dat  $\underline{\lim} a_k = -\infty$  dan en slechts dan als  $(a_n)$  naar beneden onbegrensd is.

---

<sup>7</sup>In plaats van  $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$  schrijft men ook wel  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k$  en in plaats van  $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$  schrijft men ook wel  $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k$ .

De noties van lim sup en lim inf zijn doorgaans een speciaal geval van de notie van limiet van een rij. Inderdaad, omdat de rij  $(s_n)$  dalend is, geldt in geval  $(s_n)$  naar boven begrensd is ook nog in  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\overline{\lim} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

En omdat de rij  $(i_n)$  stijgend is, geldt in geval  $(i_n)$  naar beneden begrensd is ook nog in  $\overline{\mathbb{R}}$

$$\underline{\lim} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n.$$

Voorbeeld: voor de rij  $(a_n)$  gegeven door  $a_n = n$  geldt  $s_n = +\infty$  en  $i_n = n$  en vandaar  $L = l = +\infty$ .

**Propositie 3** Zij  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$ . Voor alle  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  geldt:  $\overline{\lim} a_k = \underline{\lim} a_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ .  $\diamond$

*Bewijs.* — ‘ $\Leftarrow$ ’: We bewijzen eerst uit het ongerijmde dat  $L \leq a$ . Stel dus  $L > a$ . Dan is  $a \neq +\infty$  en is er een  $c \in \mathbb{R}$  met  $L > c > a$ . Dus  $c > a_n$  voor  $n$  groot genoeg, zeg voor  $n \geq N$ . Dat impliceert dat  $c \geq s_N$  en dus ook  $c \geq L$ . Tegenspraak. Net zo blijkt  $l \geq a$ . We hebben dus  $L \leq a \leq l \leq L$ . Dus  $L = l = a$ .

‘ $\Rightarrow$ ’: als  $a = +\infty$ , dan is  $l = \sup_n i_n = +\infty$  en bestaat er voor elke  $A \in \mathbb{R}$  een  $N$  met  $i_N > A$ . Dat impliceert  $a_n > A$  voor alle  $n \geq N$  en dus is  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty = l = a$ . Als  $a = -\infty$  gaat de redenering net zo. Rest het geval  $a \in \mathbb{R}$ . Nu  $s_n, i_n$  voor alle  $n$  en weten we dat  $a = l = \underline{\lim} a_k = L$ . Q.e.d.

**Propositie 4** Laat  $(a_n)$  en  $(b_n)$  rijen uit  $\mathbb{R}$  zijn.

1. voor  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ :  $\overline{\lim}(\lambda a_k) = \lambda \overline{\lim} a_k$  en  $\underline{\lim}(\lambda a_k) = \lambda \underline{\lim} a_k$ .
2. als  $a_n \leq b_n$  voor alle  $n$ , dan  $\overline{\lim} a_k \leq \overline{\lim} b_k$  en  $\underline{\lim} a_k \leq \underline{\lim} b_k$ .
3.  $\overline{\lim}(a_k + b_k) \leq \overline{\lim} a_k + \overline{\lim} b_k$  als het rechterlid welgedefinieerd in  $\overline{\mathbb{R}}$  is,  $\underline{\lim}(a_k + b_k) \geq \underline{\lim} a_k + \underline{\lim} b_k$  als het rechterlid welgedefinieerd in  $\overline{\mathbb{R}}$  is,  $\underline{\lim}(a_k + b_k) \leq \underline{\lim} a_k + \overline{\lim} b_k$  als het rechterlid welgedefinieerd in  $\overline{\mathbb{R}}$  is,  $\overline{\lim}(a_k + b_k) \geq \overline{\lim} a_k + \underline{\lim} b_k$  als het rechterlid welgedefinieerd in  $\overline{\mathbb{R}}$  is.
4. als de rij  $(a_n)$  convergeert, dan  $\overline{\lim}(a_k + b_k) = \overline{\lim} a_k + \overline{\lim} b_k$  en  $\underline{\lim}(a_k + b_k) = \underline{\lim} a_k + \underline{\lim} b_k$ .
5. als, voor alle  $n$ ,  $a_n \geq 0$  en  $b_n \geq 0$ , dan  $\overline{\lim}(a_k \cdot b_k) \leq \overline{\lim} a_k \cdot \overline{\lim} b_k$  en  $\underline{\lim}(a_k \cdot b_k) \leq \underline{\lim} a_k \cdot \underline{\lim} b_k$ , waarbij wel nog in de rechterleden er niet  $0 \cdot +\infty$  of  $+\infty \cdot 0$  mag staan.
6. als, voor alle  $n$ ,  $a_n \geq 0$  en  $b_n \geq 0$  en de rij  $(a_n)$  convergeert met limiet ongelijk 0, dan  $\overline{\lim}(a_k \cdot b_k) = \overline{\lim} a_k \cdot \overline{\lim} b_k$  en  $\underline{\lim}(a_k \cdot b_k) = \underline{\lim} a_k \cdot \underline{\lim} b_k$ .

*Bewijs.* — Dat is recht-toe-recht-aan. We bewijzen slechts de beweringen 1 voor lim sup.

Als een van beiden bovenlimieten  $+\infty$  is, dan geldt de bewering. Als een van beiden bovenlimieten  $-\infty$  is, zeg  $\overline{\lim} a_k = -\infty$ , dan is  $\overline{\lim} a_k \neq \infty$  en vandaar  $(a_n)$  naar boven begrensd, zeg door  $M$ . Dat impliceert dat in de te bewijzen ongelijkheid het rechterlid  $-\infty$  is. Omdat  $\overline{\lim} a_k = -\infty$ , is, voor gegeven  $A \in \mathbb{R}$ ,  $\sup_{k \geq n} a_k = s_n < A - M$  voor  $n$  groot genoeg. Daaruit  $\sup_{k \geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k = s_n + M < A$ . Dit impliceert dat ook het linkerlid  $-\infty$  is.

Stel nu beide bovenlimieten zijn eindig. Dan zijn  $(a_n)$  en  $(b_n)$  begrensd en dus ook  $(a_n + b_n)$  begrensd. Met  $s_n(a + b) = \sup_{k \geq n}(a_k + b_k)$  en verdere dergelijke notaties volgt omdat  $s_n(a + b) \leq s_n(a) + s_n(b)$  en de limieten  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a + b)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(b)$  bestaan,  $\overline{\lim}(a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a + b) \leq \lim_{n \rightarrow \infty}(s_n(a) + s_n(b)) = \lim_{n \rightarrow \infty}(s_n(a)) + \lim_{n \rightarrow \infty}(s_n(b)) = \overline{\lim} a_k + \overline{\lim} b_k$ . Q.e.d.

Van belang voor het werken met limsup en liminf is:



**Propositie 5** Stel  $\overline{\lim} a_k \in \mathbb{R}$ . Voor alle  $\epsilon > 0$  is het aantal  $n$  met  $a_n > \overline{\lim} a_k + \epsilon$  eindig en is het aantal  $n$  met  $a_n > \overline{\lim} a_k - \epsilon$  oneindig.

Stel  $\underline{\lim} a_k \in \mathbb{R}$ . Voor alle  $\epsilon > 0$  is het aantal  $n$  met  $a_n < \underline{\lim} a_k - \epsilon$  eindig en is het aantal  $n$  met  $a_n < \underline{\lim} a_k + \epsilon$  oneindig.

*Bewijs.* — We bewijzen de beweringen voor  $\limsup$ .

Omdat  $L \in \mathbb{R}$  geldt  $L \leq s_n \leq L + \epsilon$  voor  $n$  groot genoeg. Fixeer zo'n  $n$ . Voor  $k \geq n$  volgt  $a_k \leq s_n \leq L + \epsilon$ . Dus als  $a_k > L + \epsilon$ , dan  $k < n$ .

Voor alle  $n$  geldt  $L - \epsilon < s_n$ , i.e.  $L - \epsilon < \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ . Er bestaat dus een  $k \geq n$  met  $a_k > L - \epsilon$ . Q.e.d.

Zij  $(p_n)$  de rij van priemgetallen:  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ . Voor  $m \in \mathbb{N}^*$  zij

$$H_m := \underline{\lim}(p_{k+m} - p_k).$$

Het vermoeden dat er oneindig veel tweelingpriemgetallen bestaan is equivalent met  $H_1 = 2$ .<sup>8</sup> Omdat er “willekeurig grote gaten” in de rij de priemgetallen zijn, is  $\overline{\lim}(p_k - p_{k-1}) = +\infty$ .

**Stelling 6** Zij  $(a_n)$  een rij uit  $\mathbb{R}$ .  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  is het grootste limietpunt van  $(a_n)$  en  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  is het kleinste limietpunt van  $(a_n)$ .  $\diamond$

*Bewijs.* — Oefening voor de lezer. Q.e.d.

### 3.2 Voor rijen uit een volledig tralie

Bovenstaande is in de volgende twee richtingen te generaliseren: voor gegeneraliseerde rijen (dus niet per se indexverzameling van de vorm  $0, 1, \dots$ ) en voor waarden in een volledig tralie (dus niet per se  $\mathbb{R}$ ).<sup>9</sup> We bekijken hier nu deze laatste richting even heel kort.

Zij  $(a_n)$  een rij uit een volledig tralie  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Voor elk natuurlijk getal  $n (\geq 1)$  zij

$$s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}, \quad i_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Men definieert

$$\overline{\lim} a_k := \inf_n s_n, \quad \underline{\lim} a_k := \sup_n i_n.$$

Voorbeeld: zij  $X$  een verzameling. De verzameling van deelverzamelingen  $\mathcal{P}(X)$  voorzien van de relatie  $\subseteq$  is een tralie en

$$\sup\{A, B\} = A \cup B, \quad \inf\{A, B\} = A \cap B.$$

Dus

$$\overline{\lim} A_k = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \underline{\lim} A_k = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

### 3.3 Voor functies

Laat  $(X, d)$  een metrische ruimte zijn,  $E \subseteq X$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  een afbeelding en  $a \in \overline{E}$  (i.e.  $a$  is een punt in de topologische afsluiting van  $E$ ). Dan<sup>10</sup>

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) := \inf_{\epsilon > 0} \sup f \upharpoonright E \cap (B_\epsilon(a) \setminus \{a\}) \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) := \sup_{\epsilon > 0} \inf f \upharpoonright E \cap (B_\epsilon(a) \setminus \{a\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

<sup>8</sup>Opgemerkt zij dat het het pas in 2014 (door Zhang) bewezen is  $H_1$  eindig is. Momenteel weet men dat  $H_1 \leq 246$  en dat elke  $H_m$  eindig is.

<sup>9</sup> $\mathbb{R}$  is geen volledig tralie,  $\overline{\mathbb{R}}$  is dat wel.

<sup>10</sup> $B_\epsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\}$ .

De minimax-ongelijkheid impliceert

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f(x).$$

Als het getal

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) - \liminf_{x \rightarrow a} f(x)$$

welgedefinieerd is, dan heet het de oscillatie van  $f$  in  $a$ .

**Propositie 6** Voor alle  $y \in \overline{\mathbb{R}}$  geldt:  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ .

*Bewijs.* — Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Naast

$$\limsup_{x \rightarrow a} -f(x) = -\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$$

gelden de volgende rekenregels (vergelijk met paragraaf 3.1):

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f_1 + f_2)(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f_1(x) + \limsup_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f_1 + f_2)(x) \geq \liminf_{x \rightarrow a} f_1(x) + \liminf_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

waarbij de rechterleden van de ongelijkheden wel-gedefinieerd moeten zijn in  $\overline{\mathbb{R}}$ . En indien  $\lim_{x \rightarrow a} f_1$  bestaat (in  $\mathbb{R}$ ), dan geldt zelfs

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f_1 + f_2)(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f_1(x) + \limsup_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f_1 + f_2)(x) = \liminf_{x \rightarrow a} f_1(x) + \liminf_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

Ook geldt als  $f_1, f_2 \geq 0$

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f_1 f_2)(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f_1(x) \limsup_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f_1 f_2)(x) \geq \liminf_{x \rightarrow a} f_1(x) \liminf_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

waarbij in de rechterleden van de ongelijkheden er niet  $0 \cdot +\infty$  of  $+\infty \cdot 0$  mag staan. En indien  $f_1, f_2 \geq 0$  en  $\lim_{x \rightarrow a} f_1$  bestaat (in  $\mathbb{R}$ ) en ongelijk 0 is, dan geldt zelfs

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f_1 \cdot f_2)(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f_1(x) \limsup_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f_1 \cdot f_2)(x) = \liminf_{x \rightarrow a} f_1(x) \liminf_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

In het bijzonder voor de reële getallen  $\mathbb{R}$  voorzien van de metriek geïnduceerd door de absolute waarde  $|\cdot|$

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{\epsilon > 0} \sup f \upharpoonright E \cap (]a - \epsilon, a[ \cup ]a, a + \epsilon[),$$

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \inf f \upharpoonright E \cap (]a - \epsilon, a[ \cup ]a, a + \epsilon[).$$

Dat leidt voor  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ook nog tot de definities

$$\limsup_{x \downarrow a} f(x) = \inf_{\epsilon > 0} \sup f \upharpoonright E \cap ]a, a + \epsilon[, \quad \limsup_{x \uparrow a} f(x) = \inf_{\epsilon > 0} \sup f \upharpoonright E \cap ]a - \epsilon, a[,$$

$$\liminf_{x \uparrow a} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \inf f \upharpoonright E \cap ]a, a + \epsilon[, \quad \liminf_{x \downarrow a} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \inf f \upharpoonright E \cap ]a - \epsilon, a[.$$

## 4 Dini-afgeleiden

Aan het einde van de vorige paragraaf definieerden we

$$\limsup_{x \downarrow a} f(x), \limsup_{x \uparrow a} f(x), \liminf_{x \downarrow a} f(x), \liminf_{x \uparrow a} f(x).$$

Deze vier objecten spelen onder andere een rol bij de zogenaamde dini-afgeleiden. Bekijken we dit nu even nader. Stel verder dat  $I$  een eigenlijk reëel interval is en  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  een functie is. Definieer voor  $x \in I$ :

$$\overline{D}^+ f(x) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$\overline{D}^- f(x) := \limsup_{t \uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$\underline{D}^+ f(x) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$\underline{D}^- f(x) := \liminf_{t \uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

$\overline{D}^+ f(x)$  heet de rechter boven dini-afgeleide van  $f$  te  $x$ ,  $\underline{D}^- f(x)$  heet de linker beneden dini-afgeleide van  $f$  te  $x$ , etcetera.

Natuurlijk geldt: als  $\overline{D}^+ f(x) = \underline{D}^+ f(x)$ , dan bestaat  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$  en is  $f$  dus rechts differentieerbaar in  $x$ . Als  $\overline{D}^- f(x) = \underline{D}^- f(x)$ , dan bestaat  $\lim_{t \uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$  en is  $f$  dus links differentieerbaar in  $x$ . En:  $f$  is differentieerbaar in  $x$  dan en slechts dan als al de vier dini-afgeleiden van  $f$  te  $x$  gelijk zijn en eindig zijn.

We gaan nu nog een stapje verder. Voor  $x \in I$  en  $v \in \mathbb{R}$  definieer

$$\overline{D}_v^+ f(x) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$\overline{D}_v^- f(x) := \limsup_{t \uparrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$\underline{D}_v^+ f(x) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$\underline{D}_v^- f(x) := \liminf_{t \uparrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

$\underline{D}_v^- f(x)$  heet de linker dini-afgeleide van  $f$  te  $x$  in de richting  $v$ , etcetera.

Dini-afgeleiden worden onder andere gebruikt om de notie van pseudo-convexe functie in te voeren.